

Primo compito

(tempo 3 ore)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.
- Si consegni solo la bella e si numerino gli esercizi ed in ogni esercizio la risposta a ciascuna domanda.

Esercizio 1: *Neutrini ed antineutrini con massa nulla (neutrini elettronici)
nell'ensemble canonico*

Si considerino fermioni di spin 1/2 con massa nulla e livelli d'energia $\varepsilon_{\mathbf{p},\sigma} = cp$, ove \mathbf{p} e σ individuano lo stato, denotando rispettivamente l'autovalore dell'impulso e della proiezione dello spin nella direzione dell'impulso ($\sigma = \pm 1$), e c è la velocità della luce. Supporremo che istantaneamente, all'interno dell'assegnato volume V ed a temperatura T ci sia, per eccitazione termica, una popolazione

$$N\{n_{\mathbf{p},\sigma}\} = \sum_{\mathbf{p},\sigma} n_{\mathbf{p},\sigma}$$

di tali Fermioni, con energia

$$E\{n_{\mathbf{p},\sigma}\} = \sum_{\mathbf{p},\sigma} \varepsilon_{\mathbf{p},\sigma} n_{\mathbf{p},\sigma} = \sum_{\mathbf{p}} cp \sum_{\sigma} n_{\mathbf{p},\sigma}.$$

Gli $n_{\mathbf{p},\sigma}$ fluttuano al variare del tempo (cfr. con il corpo nero). Si consideri un volume cubico e si utilizzino condizioni al contorno periodico.

1. Si calcoli la funzione di partizione canonica $Q(V, T)$ e da questa l'energia libera di Helmholtz $A(V, T)$. Può essere utile la relazione fornita in nota.

[6 punti]

2. Si calcoli l'occupazione media $\langle \sum_{\sigma} n_{\mathbf{p},\sigma} \rangle$.

[3 punti]

3. Si calcoli la densità di energia $E(V, T)/V$.

[3 punti]

4. Si calcoli il calore specifico $C_V(T)$.

[3 punti]

Esercizio 2: *Condensazione di Bose in 2 dimensioni*

Si considerino Bosoni di spin 0, in 2 dimensioni, con livelli d'energia $\varepsilon_{\mathbf{p},\sigma} = \gamma p^s$, ove \mathbf{p} denota l'autovalore dell'impulso e $s > 0$. Le particelle si muovono sul quadrato di area A ; si utilizzino condizioni al contorno periodico.

1. Si calcoli il logaritmo della funzione di granpartizione per unità d'area. Può essere utile la relazione fornita in nota.

[6 punti]

2. Utilizzando il risultato del punto precedente si calcolino la pressione P e l'energia media per unità d'area E/A e si ricavi il rapporto $(E/V)/P$.

[3 punti]

3. Utilizzando il risultato del punto 1 si calcoli la densità media.

[3 punti]

4. Si dica per quali valori di s ci sia condensazione di Bose e perché.

[3 punti]

NOTA: Può essere utile la relazione $\log(1+x) = \sum_{n=1,\infty} (-)^{n-1} x^n/n$, valida per $|x| \leq 1$.