Fisica Statistica. – A.A. 2019-2020, 18 dicembre 2019

Primo compito

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1: *Bosoni di spin S=1 in campo magnetico*

Si considerino dei bosoni non interagenti, di spin $S = 1$ (in unità di $\hbar$), in presenza di un campo magnetico $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ nell'ensemble grancanonico con condizioni al contorno periodiche. L'hamiltonia di singola particella è

$$\hat{h} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \mu_0 \hat{S}_z B,$$

ove $\mu_0 = q\hbar/mc$, con $q > 0$ ed m carica e massa dei bosoni. Le energie di sigola particella sono quindi

$$\epsilon(\mathbf{p}, \sigma) = \frac{p^2}{2m} - \mu_0 B\sigma, \quad \sigma = -1, 0, 1,$$

ove σ è l'autovalore di $\hat{S}_z$, $\hat{S}_z|\sigma\rangle = \sigma|\sigma\rangle$ e $\mathbf{p}$ quello dell'impulso, $p = |\mathbf{p}|$.

1. Si dica qual è il minimo valore di $\epsilon(\mathbf{p}, S_z)$ e quale sia quindi la condizione sul potenziale chimico μ affinché la funzione di gran partizione esista.

2. Evidentemente il numero medio di particelle con impulso p e proiezione di spin σ è $\langle n_{\mathbf{p},\sigma}\rangle = [e^{\beta\epsilon(\mathbf{p},\sigma)}/z - 1]^{-1} = [e^{\beta[p^2/2m - \mu_0 B\sigma]}/z - 1]^{-1} = [e^{\beta p^2/2m}/ze^{\beta\mu_0 B\sigma} - 1]^{-1}$. Ricordando il risultato per la densità media per bosoni di spin zero risulta immediatamente che la densità media di particelle con proiezione di spin σ è

$$\rho_\sigma = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}} \langle n_{\mathbf{p},\sigma}\rangle = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(ze^{\beta\mu_0 B\sigma}).$$

   Si calcoli la densità di magnetizzazione $M = \mu_0[\rho_+ - \rho_-]$ al primo ordine in B.

3. Utilizzando il risultato del punto precedente, che fornisce $M(z, T, B)$, si calcoli la suscettività magnetica $\chi(z, T) = \partial M/\partial B|_{z,T,B=0}$

4. Si dica cosa succede a $\chi(z, T)$ ove si porti il sistema verso la regione critica, ovvero nel limite $z \to 1^-$ (ζ tende ad 1 da sinistra).

Nota: se $g_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^\alpha$, $g'_\alpha(z) = g_{\alpha-1}(z)/z$.

Esercizio 2: *Grafene*

In un *foglio* di grafene (formato da atomi di carbonio in un reticolo bidimensionale esagonale) gli elettroni (approssimati come non interagenti) hanno energie di singola particella

$$\epsilon_{\pm}(\mathbf{p}, S_z) = \pm\hbar v_F k \equiv \varepsilon_{\pm}(p),$$

ove $\mathbf{p}$ è l'autovalore dell'impulso, $p = |\mathbf{p}| \equiv \hbar k$ e l'energia di singola particella non dipende dalla proiezione di spin. Valori tipici di v_f sono di circa $10^8 cm/s$. Diremo che ci sono due bande d'energia: la banda $\varepsilon_+(p)$ e la banda $\varepsilon_-(p)$. Per ogni impulso $\mathbf{p}$ e proiezione di spin S_z, c'e' uno stato con energia $\varepsilon_+(p)$, uno con energia $\varepsilon_-(p)$. Nel seguito utilizzeremo condizioni al contorno periodiche.

1. Il numero medio (o numero di occupazione) di elettroni con impulso $\mathbf{p}$ e data proiezione di spin è in ciascuna banda $n_{\pm}(k) = [e^{\beta(\varepsilon_{\pm}-\mu)} + 1]^{-1}$, ovvero

   $$n_+(k, T, \mu) = \frac{1}{e^{\beta(+\hbar v_F k - \mu)} + 1}, \quad n_-(k, T, \mu) = \frac{1}{e^{\beta(-\hbar v_F k - \mu)} + 1}.$$

   Sfruttando le espressioni precedenti e sapendo che a $T = 0$ tutti gli stati ad energia negativa sono pieni, $n_-(p, T, \mu) = 1$, e tutti quelli ad energia positiva sono vuoti, $n_+(p, T, \mu) = 0$, si mostri che a $T = 0$ $\mu = 0$. Si ricorda che per $T \to 0$ $[e^{\beta y} + 1]^{-1} \to \theta[-y]$, ove $\theta[x]$ è la funzione gradino, $\theta[x] = 1, x > 0, = 0, x < 0$.

2. Si può mostrare che anche a $T > 0$ $\mu = 0$. Utilizzando questo fatto si mostri che $1 - n_-(p, T, 0) = n_+(p, T, 0)$.

3. Si scriva l'espressione di $E(T) - E(0)$ in termini degli $n_{\pm}(p, T, 0)$ e $\varepsilon_{\pm}(p)$.

4. Si calcoli $E(T) - E(0)$ esplicitamente come funzione di T, rimpiazzando la somma sugli impulsi con un integrale e valutando l'integrale; si ottenga così il calore specifico per unità d'area.