Condensed Matter Physics II. – A.A. 2021-2022, June 15, 2022

(*time 3 hours*)

Solve the following two exercises.

NOTE:

- Give all details which help in understanding the proposed solution. Answers which only contain the final result or not enough detail will be judged insufficient and discarded;
- If you are requested to give evaluation/estimates, do so using 3 significant figures.

Exercise 1: Termodinamica di ioni magnetici indipendenti (non interagenti, di lunghezza S) in campo magnetico esterno H.

1. Si esprima l'energia libera di Helmholtz per ione F in termini di funzioni iperboliche della variabile $x = \beta\mu_B gSH$. Si usi per quanto possibile la variabile x anche nel seguito. **Con l'eccezione della domanda 6, non vanno fatte assunzioni sulla grandezza del campo H.**

2. Si calcoli la magnetizzazione media per ione
$$M(H) = -\frac{\partial F}{\partial H}\bigg|_T .$$

3. Si calcoli la suscettività magnetica per ione definita da
$$\chi(H) = \frac{\partial M}{\partial H}\bigg|_T .$$

4. Si calcoli l'entropia per ione s a fissato H.

5. Si nostri che il calore specifico a fissato H
$$c_H = T\frac{\partial s}{T}\bigg|_H$$
è proporzionale a $\chi(H)$ tramite un fattore che contiene esclusivamente H e T. Si dia esplicitamente questo fattore.

6. Specializzando l'espressione trovata al punto precedente al regime $x \ll 1$, nel caso di un cristallo isolante (con N atomi) drogato con N_p ioni paramagnetici e utilizzando l'eq. (23.27) per il calore specifico reticolare di trova che il contributo reticolare e quello magnetico diventano uguali ad una temperatura
$$T_0 \approx \left(\frac{N_p}{N}\right)^{1/5} \left(\frac{g\mu_B H}{K_B\Theta_D}\right)^{2/5} \Theta_D$$
con Θ_D la temperatura di Debye. Si dia il valore di
$$\left(\frac{g\mu_B H}{K_B\Theta_D}\right)^{2/5}$$
per $\Theta_D = 200K$ e $H = 10^4 gauss$. Quale dei due calori specifici considerati domina per $H > 0$ $T < T_0$?

Exercise 2: *Effetto Meissner*

Si consideri un superconduttore che occupa la regione $0 < z < d$ estendendosi indefinitamente in x e y. Nelle regioni $z < 0$ e $z > d$ è presente un campo magnetico $(H_0, 0, 0)$.

1. Si derivino le condizioni di continuità delle componenti dell'induzione $\mathbf{B}$ alle interfacce $z = 0$ e $z = d$.
2. Si risolva l'equazione di London per ottenere la forma generale di $\mathbf{B}$ nella regione $0 < z < d$.
3. Imponendo le condizioni di continuità al contorno a $z = 0$ e $z = d$ si ottenga l'espressione di $\mathbf{B}$ all'interno del superconduttore.
4. Si ottenga l'espressione della densità di corrente all'interno del superconduttore.
5. Si calcoli la magnetizzazione media all'interno del superconduttore

$$M_{av}(d) = \frac{1}{d}\int_0^d dz \frac{B_x(z) - H_0}{4\pi}.$$

6. Si ottengano forme limiti per $M_{av}(d)$ nei casi limite (i) $d/\Lambda \gg 1$ e (ii) $d/\Lambda \ll 1$.