Fisica Statistica. – A.A. 2009-2010, 18 Dicembre 2009

Secondo compito

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Gas ideale di Fermioni in 2 dimensioni*

Si consideri dei fermioni di spin 1/2, liberi e non interagenti in 2 dimensioni e si usino condizioni al contorno periodiche (Born-von Karman).

1. Si calcoli esplicitamente la densità di stati in energia, per unità d'area:
$$g(E) = \frac{2}{A} \sum_{\mathbf{p}} \delta(E - \frac{p^2}{2m})$$
.
2. Si calcoli la densità media $\rho = \langle N \rangle / A$ in termini della fugacità z e della lunghezza d'onda termica λ. Si ricorda che $\lambda^2 = h^2/(2\pi m\ K_B T)$.
3. Si calcoli l'equazione di stato (ovvero la funzione di gran partizione) esprimendo βP in temini di z e λ .[Si usi il fatto che $\int_0^\infty dt\, log(1 + z\, e^{-t}) = f_2(z)$; per $z < 1$ si ha che $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n / n^2$.
4. Utilizzando il risultato del punto 2 si consideri il limite classico, ovvero piccoli valori di $\lambda^2 \rho$, per ottenere la prima correzione quantistica non nulla all'equazione di stato, calcolata al punto precedente.

Esercizio 2 *Gas ideale di Bosoni in 4 dimensioni*

Si consideri un ipotetico sistema di Bosoni di spin 0 liberi e non interagenti in 4 dimensioni e si usino condizioni al contorno periodiche (Born-von Karman).

1. Si calcoli esplicitamente la densità di stati in energia, per unità d'area:

$$g(E) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \delta(E - \frac{p^2}{2m}),$$

   ove V è il volume 4-dimensionale e l'angolo solido in 4 dimensioni è $\Omega_4 = 2\pi^2$.

2. Si calcoli la densità media $\rho = \langle N \rangle / V$ in termini della fugacità z e della lunghezza d'onda termica λ. Si ricorda che $\lambda^2 = h^2/(2\pi m\ K_B T)$ e si includa il termine corrispondente a $\mathbf{p} = 0$. Si tenga conto del fatto che $\int_0^\infty dt\, t\, z e^{-t}/(1 - z e^{-t}) = g_2(z) = \sum_{n=1}^\infty z^n/n^2$.

3. Sfruttando il fatto che $g_2(1) = \zeta(2) = \pi^2/6$ è finita, si mostri come in 4 dimensioni ci sia condensazione di Bose-Einstein e si ricavi l'espressione del valore critico y_c del parametro di degenerazione $y = \lambda^4 \rho$ in della funzione g_2.

4. Supponendo di operare a densità costante si trovi l'espressione che dà la frazione di condensato per $T < T_c$ (ovvero per $y > y_c$, e la densità ρ fissata), in funzione di T/T_c e se ne faccia un disegno qualitativo.