

Studio di lastre forate mediante il Metodo delle Celle

Francesca COSMI

Dipartimento di Energetica, Università di Trieste,

via A. Valerio 10, 34127 Trieste, Italia

cosmi@univ.trieste.it

SOMMARIO. *Questo lavoro descrive uno studio numerico, condotto utilizzando il Metodo delle Celle, riferito all'analisi dello stato tensionale elastico in lastre forate in diverse condizioni di carico. Vengono investigate diverse geometrie e viene discusso il comportamento al diminuire dei rapporti caratteristici h/d e w/d .*

1 Introduzione.

In questo lavoro viene risolto numericamente il problema elastico piano costituito da una lastra forata caricata come in Fig.7. Questo tipo di geometria astratta può essere impiegato per rappresentare una grande varietà di connessioni meccaniche, quali ad esempio gli attacchi dei motori alla struttura nell'industria aeronautica, i collegamenti tra forcella, spinotto e biella nei motori a scoppio, ecc.

Viene impiegato il Metodo delle Celle con approssimazione quadratica del campo degli spostamenti.

2 Modellazione numerica.

Il Metodo delle Celle [1], di recente sviluppo, risulta particolarmente adatto ad approssimare il campo degli spostamenti interni alla cella in prossimità di punti che presentano forti variazioni del gradiente (cioè delle deformazioni) quando vengono adottate per l'interpolazione funzioni paraboliche [2].

Come previsto dal metodo, vengono utilizzate due mesh sfalsate tra loro cui associare le diverse classi di variabili che descrivono il problema in esame.

In particolare vengono adottate (Fig.1):

- una mesh primale, di Delanuay, cui associare le variabili di tipo *configurazione*;
- una mesh duale, ottenuta utilizzando i due punti di Gauss dei lati ed il baricentro di ciascun triangolo della mesh primale.

Nel metodo delle celle la cella duale può essere vista come *regione di influenza* del nodo al suo interno, regione per la quale è possibile scrivere le equazioni di equilibrio direttamente in forma discreta.

Le celle primali hanno ciascuna 6 nodi come illustrato in Fig.2.

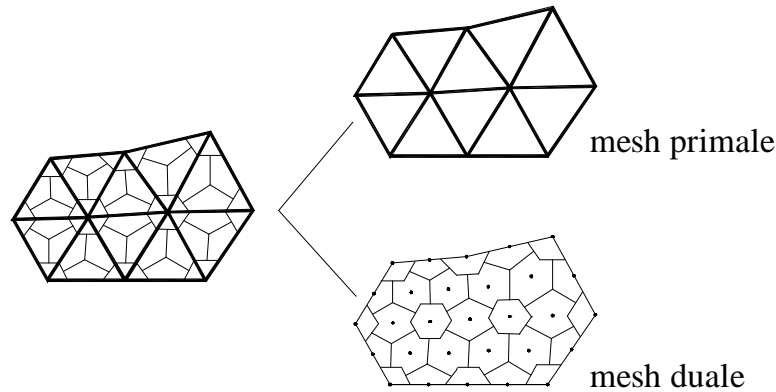


Fig.1

Come set di coordinate interne alla cella vengono utilizzate le coordinate areali b_1, b_2, b_3 .

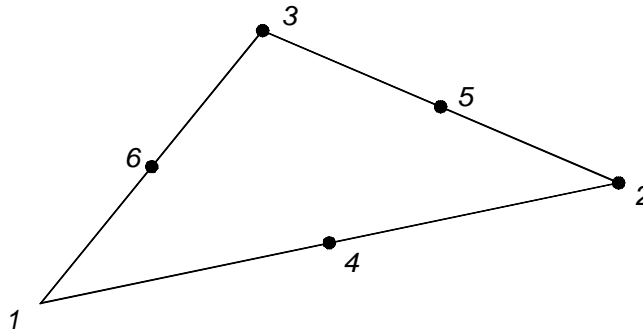


Fig.2

La soluzione approssimata viene ottenuta determinando i valori u_k, v_k delle componenti degli spostamenti nodali, mentre in un punto $P(b_1, b_2, b_3)$ interno alla cella lo spostamento viene ottenuto interpolando gli u_k, v_k con delle funzioni paraboliche Q_k :

$$u(b_1, b_2, b_3) = \sum_1^6 Q_k(b_1, b_2, b_3) u_k \quad (1)$$

$$v(b_1, b_2, b_3) = \sum_1^6 Q_k(b_1, b_2, b_3) v_k.$$

Le funzioni interpolanti Q_k sono combinazioni lineari tra le coordinate areali ed i loro quadrati e devono assumere il valore 1 nel nodo k -esimo e 0 negli altri 5 nodi della cella:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2b_1^2 & Q_2 &= 2b_2^2 & Q_3 &= 2b_3^2 \\ Q_4 &= 4b_1b_2 & Q_5 &= 4b_2b_3 & Q_6 &= 4b_1b_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Ricordando che la matrice delle deformazioni è data dalla parte simmetrica del gradiente degli spostamenti, è possibile sviluppare le espressioni delle deformazioni in un punto interno alla cella che, in forma matriciale, risultano espresse da

$$\{e\} = \frac{1}{2A_c} [G] \{u\} \quad (3)$$

in cui:

- A_c è l'area della cella considerata,
- $\{e\}$ è il vettore a tre elementi che raccoglie le componenti della deformazione nel punto,
- $\{u\}$ è un vettore a 12 elementi che raccoglie le componenti degli spostamenti nodali,
- $[G]$ una matrice 3 x 12 i cui elementi sono funzione sia delle coordinate areali del punto interno alla cella sia delle coordinate assolute dei vertici della cella.

Nell'approssimazione adottata, le deformazioni hanno andamento lineare entro la cella primale.

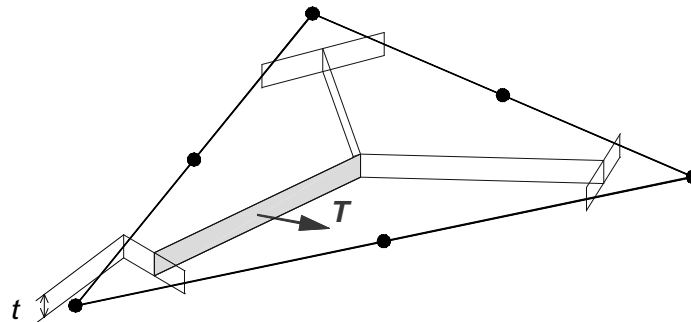


Fig.3

Per poter scrivere le equazioni di equilibrio, occorre esprimere la relazione di Cauchy per i lati della cella duale, cioè trovare le componenti della forza T che agisce su ciascuna faccia del poligono duale che circonda il nodo (Fig.3):

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x & A_y & 0 \\ 0 & A_y & A_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \{s\} \quad (4)$$

in cui A_x, A_y hanno il significato illustrato in Fig.4.

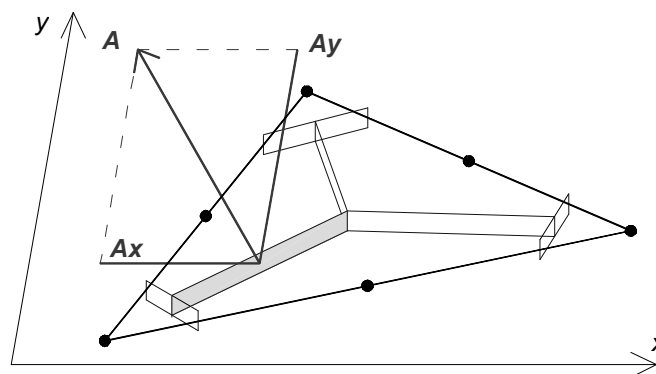


Fig.4

Introducendo la matrice $[D]$ 3 x 3, che esprime la legge di Hooke per il materiale omogeneo che costituisce la cella (in questo studio per stati di tensione piana), ed utilizzando l'espressione (3) delle deformazioni, si ottiene

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A_c t} [A][D][G]\{u\} \quad (5)$$

Consideriamo ora il nodo 1 della generica cella c (Fig.5). Le forze agenti sui lati a e b del poligono duale del nodo 1 sono T_a e T_b . Analogamente è possibile esprimere per ciascuno dei sei nodi della cella primale le forze di superficie scambiate tra i poligoni di influenza della cella c (Fig.5):

$$\begin{aligned} T_1^c &= -T_a + T_b \\ T_2^c &= -T_c + T_d \\ T_3^c &= -T_e + T_f \\ T_4^c &= -T_b - T_g + T_h + T_c \\ T_5^c &= -T_d - T_h + T_i + T_e \\ T_6^c &= -T_f - T_i + T_g + T_a \end{aligned} \quad (6)$$

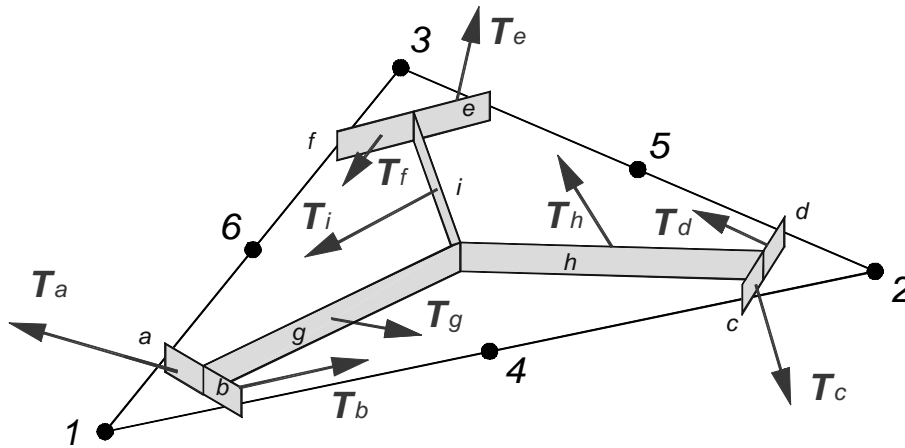


Fig.5

E' possibile quindi esprimere l'equazione di equilibrio di ciascuna regione di influenza. Infatti, detti (Fig.6):

- U_h il poligono di influenza del nodo h ,
- T_h il vettore forza totale, agente sulla superficie di U_h , somma dei contributi di tutte le celle primali che circondano il nodo h ,
- F_h il vettore risultante delle forze di volume agenti su U_h , somma dei contributi di tutte le celle primali che circondano il nodo h ,
- B_h il vettore risultante delle forze esterne agenti su U_h attraverso il contorno del corpo,

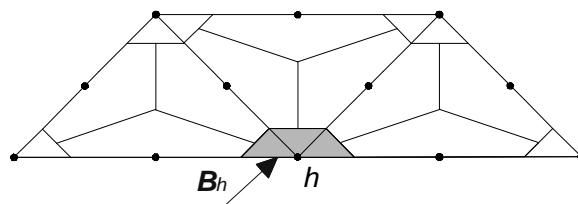


Fig.6

l'equazione di equilibrio della cella duale U_h risulta:

$$\mathbf{T}_h + \mathbf{F}_h + \mathbf{B}_h = 0 \quad (7)$$

Se n è il numero dei nodi, il sistema scritto risulta un sistema lineare di $2n$ equazioni nelle $2n$ incognite u_h, v_h , componenti dello spostamento nodale, che può essere risolto con i metodi usuali. E' da notare che la matrice fondamentale così ottenuta non coincide con quella del FEM per elementi triangolari a 6 nodi.

3 Risultati e discussione

Il problema delle lastre forate caricate sul contorno del foro è stato affrontato in passato per determinate geometrie e condizioni di carico [3], [4], [5], [6], tuttavia, anche a causa delle discordanze sui risultati in letteratura, si ritiene che lo stato tensionale non sia sempre sufficientemente noto, in particolare al crescere delle dimensioni del foro rispetto alla larghezza della lastra.

Le condizioni di carico esaminate sono descritte in Fig.7.

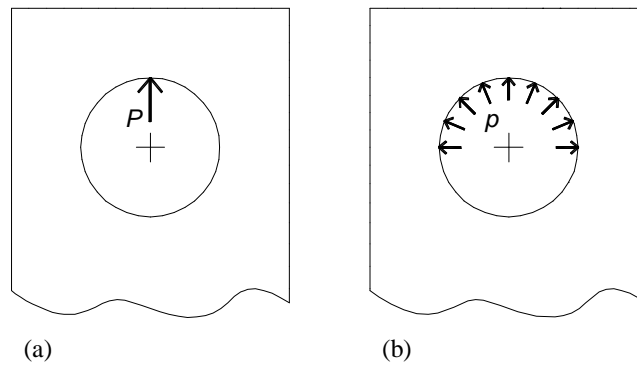


Fig.7

La condizione di carico in Fig.7(a) costituisce un'approssimazione accettabile quando il carico è piccolo e vi è ampio gioco tra perno ed occhio.

La condizione di carico in Fig.7(b) è adatta a simulare il collegamento tra forcella e spinotto, essendo stato mostrato [7] che gli sforzi circonferenziali nel punto A di Fig.8 possono essere accuratamente valutati assumendo come carico una pressione uniforme agente su metà del foro, senza dover risolvere direttamente il problema di contatto secco tra perno e foro nella lastra.

La geometria del problema, la notazione utilizzata e le condizioni al contorno sono riportate in Fig.8.

Il materiale modellato è un acciaio i cui parametri sono riportati in Tabella 1.

Modulo di Young	207.000 MPa
Coefficiente di Poisson	0.3

Tabella 1. Materiale

La risultante del carico applicato è sempre $P=2110$ N, la pressione da applicare sulla semicirconferenza per il caricamento di Fig.7(a) è calcolata come $p=2P/(d*t)$.

Lo spessore t della lastra è 3.81 mm, le altre dimensioni sono riportate in Tabella 2.

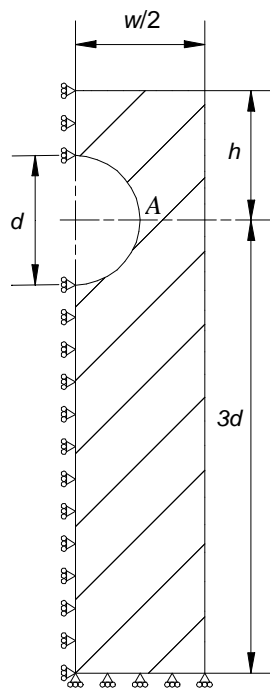


Fig.8

Diametro d	3.74 mm
$H=h/d$	1
$W=w/d$	2, 1.5, 1.2, 1.1

Tabella 2. Dimensioni.

In Fig.9 è diagrammato il valore della sollecitazione circonferenziale lungo il bordo del foro nella situazione di carico di Fig.7(a), mentre quello per la situazione di carico 7(b) è riportato in Fig.10.

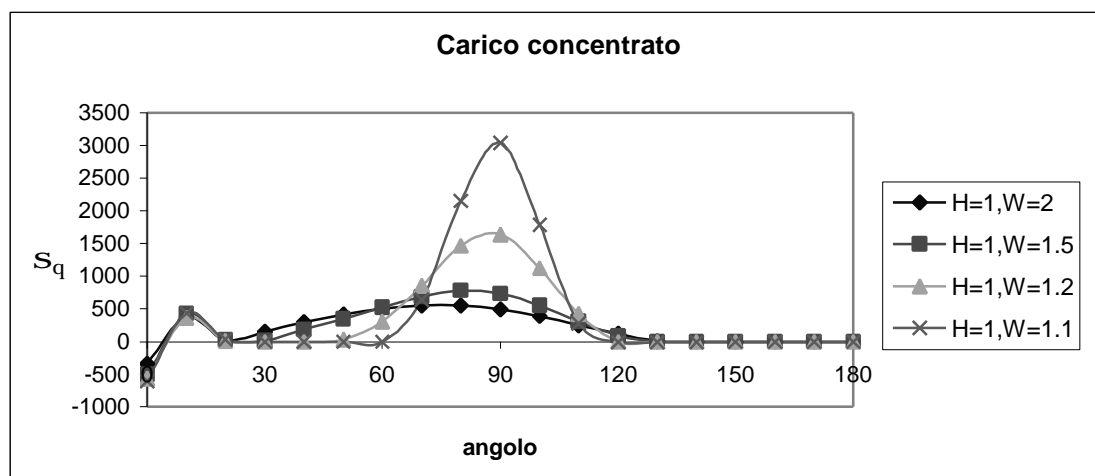


Fig.9

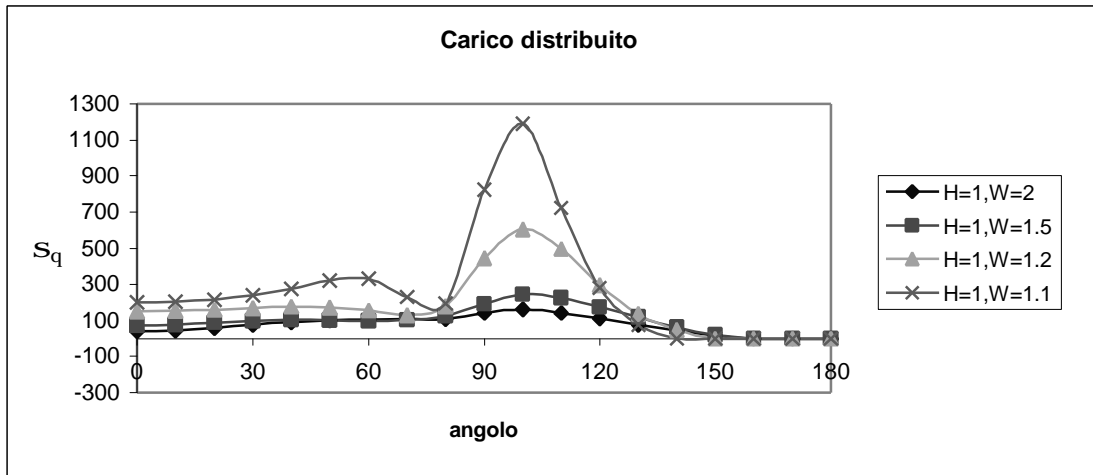


Fig.10

Al variare delle condizioni di carico, a parità di geometria si vede come le tensioni, in particolare nella zona più sollecitata, risultano molto più elevate per carico concentrato rispetto al caso di carico distribuito.

Per $W=2$ la distribuzione delle tensioni è quella riportata in Fig. 11(a) per carico concentrato e Fig.11(b) per carico distribuito.

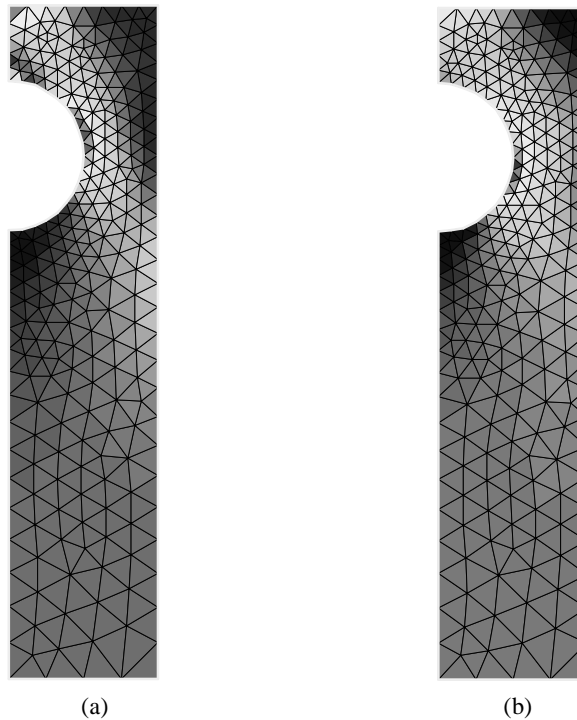


Fig.11

Al diminuire del rapporto W le distribuzioni delle tensioni circonferenziali in prossimità della zona più sollecitata sono diverse nei due casi come si può facilmente notare rispettivamente in Fig.12(a) e Fig.12(b) che si riferiscono al caso $W=1.2$.

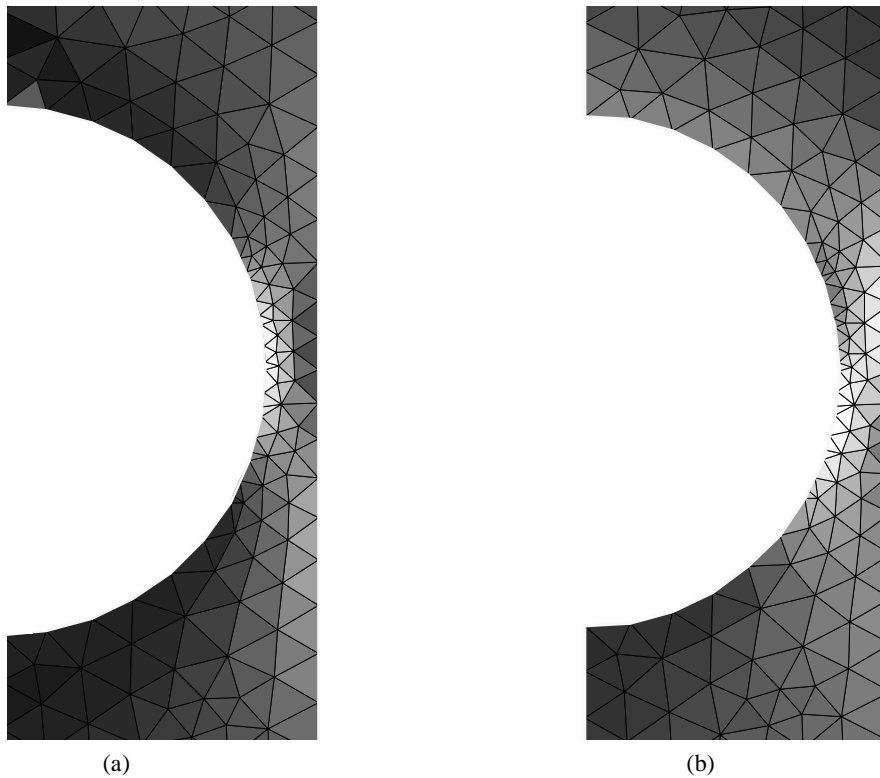


Fig.12

Il diverso andamento delle tensioni nella zona più sollecitata per i due modelli di carico è messo ancora più in evidenza osservando l'andamento del fattore di concentrazione degli sforzi SCF, calcolato come rapporto tra la massima tensione tangenziale e la tensione nominale della sezione indebolita, $SCF = s_{qmax} / s_{nom}$, avendo assunto $s_{nom} = 2P / [(w-d) \cdot t]$.

In Fig.13 è riportato SCF in funzione del rapporto caratteristico W .

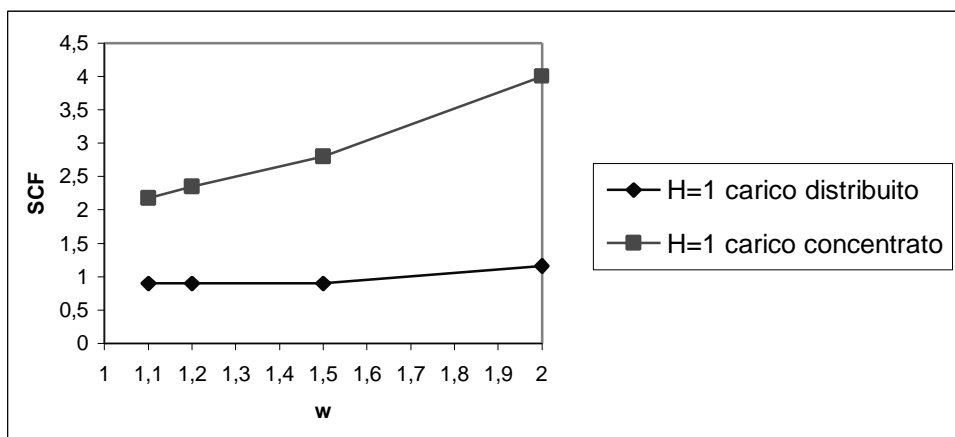


Fig. 13

Si vede come per carico distribuito il fattore di concentrazione degli sforzi tende al valore uno al diminuire di W (e quindi all'aumentare delle dimensioni del foro rispetto alla larghezza della lastra), mentre quando si considera il caso di un carico concentrato, il fattore di concentrazione degli sforzi tende ad assumere il valore due.

Alle due condizioni di carico corrispondono quindi due diverse distribuzioni di tensione nella sezione indebolita dal foro, come messo in evidenza anche dalle deformate (amplificate) riportate rispettivamente in Fig. 14(a) per carico concentrato e Fig.14(b) per carico distribuito.

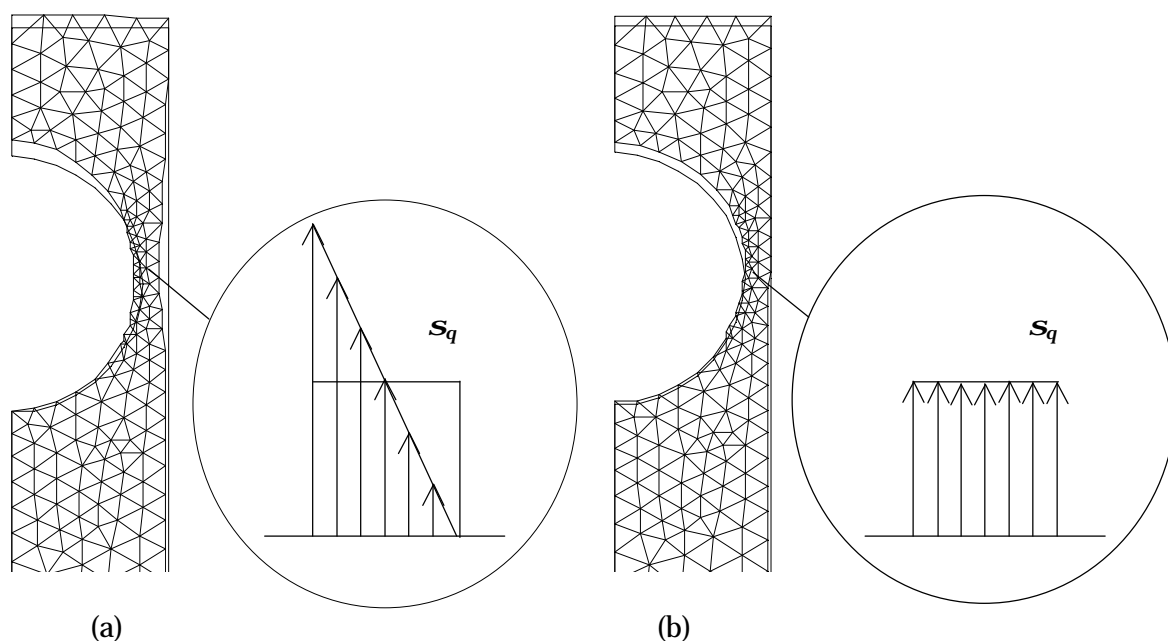


Fig.14

In caso di carico concentrato la tensione circonferenziale al bordo del foro vale $s_q=2s_{nom}$, e decresce con andamento lineare verso l'esterno fino ad annullarsi (Fig.14(a)). Questo andamento è caratteristico di una sollecitazione tenso-flessionale, in cui una distribuzione a farfalla legata alla coppia flettente si sovrappone ad una sollecitazione uniforme, necessaria ad equilibrare il carico. In caso di carico distribuito la sollecitazione (Fig. 14(b)) nella sezione indebolita è invece di trazione pura e la tensione risulta distribuita uniformemente con $s_q=s_{nom}$.

4 Conclusioni

Si è applicato il metodo delle celle con interpolazione parabolica degli spostamenti al problema della determinazione dello stato tensionale elastico in lastra forate soggette a due caratteristiche condizioni di carico. Si è presentato il modello numerico utilizzato e si sono analizzati i risultati ottenuti al variare di un parametro caratteristico della geometria del problema.

Sono previsti ulteriori sviluppi, che amplieranno l'indagine all'influenza di altri parametri del sistema considerato.

Ringraziamenti

Si ringrazia il prof. Enzo Tonti per i preziosi consigli durante lo sviluppo di questo lavoro.

Bibliografia

- [1] **Tonti E.** *Formulazione finita delle equazioni di campo:il Metodo delle Celle.* In pubblicazione sugli Atti del XIII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale, 2000, Brescia, Italia, novembre 2000.
- [2] **Cosmi F.** *Applicazione del Metodo delle Celle con approssimazione quadratica.* Atti del XXIX Convegno Nazionale AIAS, Lucca, Italia, settembre 2000
- [3] **Grant R.J., Smart J., Stanley P.** A parametric study of the elastic stress distribution in pin-loaded lugs. *J. Strain Analysis*, 1994, **29**(4), 299-307.

- [4] **Wang G.S.** Stress analysis for a lug under various conditions. *J. Strain Analysis*, 1994, **29**(1), 7-16.
- [5] **Lin S., Hills D.A., Nowell D.** Stresses in a flat plate due to a loose pin pressing against a cracked hole. *J. Strain Analysis*, 1997, **32**(2), 145-156.
- [6] **Strozzi A.** *Costruzione di Macchine*. 1998 (Pitagora Editrice), 336-340.
- [7] **De Bona F., Strozzi A., Vaccari P.** On the pressure distribution at the contact between small end of a conrod and gudgeon pin. *Proceedings of AMST'99*, 1999, Udine, Italy, 1999, 745-752.