

---

## ELASTO-DINAMICA CON IL METODO DELLE CELLE

Francesca Cosmi<sup>(1)</sup>, Enzo Tonti<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> Università di Trieste, [cosmi@units.it](mailto:cosmi@units.it)

<sup>(2)</sup> Università di Trieste, [tonti@units.it](mailto:tonti@units.it)

### Sommario/Abstract

Oggetto del presente lavoro è l'applicazione del Metodo delle Celle a problemi dinamici, applicazione che risulta particolarmente interessante nel confronto con altri metodi numerici. Il CM infatti combina gli aspetti vantaggiosi dei metodi degli Elementi Finiti e delle Differenze Finite, fornendo una matrice di massa diagonale ed un sistema risolvibile esplicito, pur utilizzando anche griglie non strutturate.

Caratteristica del Metodo delle Celle è quella di non partire dalle equazioni differenziali, ma scrivere direttamente in forma discreta le equazioni di bilancio su un complesso duale a quello utilizzato per descrivere la configurazione del sistema. Il sistema fondamentale di bilancio dinamico risulta un sistema esplicito, la cui soluzione fornisce un'approssimazione caratterizzata da un'elevata accuratezza.

Vengono riportati i risultati di diverse simulazioni, ed i confronti con due programmi FEM di vasto impiego, ANSYS ed ABAQUS, che permettono di apprezzare il metodo proposto anche in termini di accuratezza della soluzione.

*Parole chiave: metodi numerici, metodo delle celle, elasto-dinamica, analisi transitoria*

### 1. Introduzione

In fase di progettazione e sviluppo di prodotti tecnologici ed industriali è comune il ricorso a metodi numerici per la modellazione e la simulazione del comportamento dei sistemi. In particolare, la possibilità di fare delle previsioni sul comportamento a fatica di componenti meccanici, attraverso delle simulazioni di carattere numerico su prototipi virtuali, consente di accelerare il processo di messa a punto dei sistemi meccanici ed ha come conseguenza una notevole riduzione dei tempi legati all'esecuzione di prove sperimentali ed un abbattimento dei costi di sviluppo del progetto.

Uno degli aspetti di fondamentale importanza nel processo di valutazione del comportamento a fatica degli organi di macchina consiste nella corretta stima dello stato tensionale e deformativo, specialmente in presenza di discontinuità e concentrazioni di tensione.

Il metodo numerico comunemente adottato è quello degli Elementi Finiti, secondo i due approcci possibili, nel dominio del tempo o nel dominio della frequenza [1].

L'analisi transitoria nel dominio del tempo viene computata mediante integrazione numerica. Vi sono due categorie di metodi di integrazione numerica: condizionatamente stabili e incondizionatamente stabili.

Il primo approccio richiede che il passo di integrazione temporale sia piccolo e la risposta al termine del passo di integrazione viene ricavata sulla base delle condizioni imposte all'inizio del passo (metodi espliciti). Questi metodi necessitano di una matrice di massa diagonale e sono molto convenienti dal punto di vista computazionale. In pratica l'unica condizione che deve essere soddisfatta è quella di Courant e cioè il passo di integrazione temporale deve essere più piccolo del minimo periodo di tempo richiesto perchè un disturbo si propaghi tra due nodi della mesh, nota la velocità di propagazione delle onde nel materiale. Il Metodo degli Elementi Finiti non fornisce in generale una matrice di massa diagonale e quindi non consente l'utilizzo di metodi di integrazione espliciti. Il Metodo delle Differenze Finite (FDM), per contro, fornisce una matrice di massa diagonale ed un sistema esplicito ma richiede l'impiego di griglie strutturate, da cui la difficoltà nel modellare forme curve e l'impossibilità di infittire localmente la mesh.

I metodi incondizionatamente stabili ricavano la risposta del sistema al termine del passo di integrazione sulla base delle condizioni imposte alla fine del passo (metodi impliciti). La risposta è numericamente stabile qualunque sia il passo di integrazione, ma questo non significa che sia possibile utilizzare qualsiasi passo, in quanto l'accuratezza della soluzione diminuisce all'aumentare del passo stesso. Il processo, che richiede la risoluzione del sistema fondamentale ad ogni passo temporale, diventa quindi molto oneroso. Il costo computazionale dell'analisi dinamica con gli Elementi Finiti, necessariamente maggiore di quello dell'analisi statica, può essere ridotto diagonalizzando la matrice di massa (processo di lumping), ma a costo di una perdita di accuratezza nella soluzione.

Nonostante quindi il Metodo degli Elementi Finiti rappresenti uno strumento estremamente importante ed ampiamente utilizzato anche in ambito industriale, risulta interessante la ricerca e lo sviluppo di nuovi metodi numerici in grado di migliorarne i risultati, sia in termini di velocità di calcolo, sia in termini di accuratezza della soluzione. Particolarmente promettente per l'analisi dello stato tensionale e deformativo in condizioni di carico dinamico risulta il Metodo delle Celle (CM), un metodo numerico di recente introduzione [2, 3], che è attualmente impiegato in diversi campi, quali ad esempio modellazione di materiali eterogenei [4, 5], problemi di biomeccanica [6], di diffusione, meccanica strutturale, ecc [7], problemi di tipo dinamico in campo elettromagnetico [8].

Oggetto del presente lavoro è l'applicazione del Metodo delle Celle a problemi dinamici, applicazione che risulta particolarmente interessante nel confronto con altri metodi numerici. Il CM infatti combina gli aspetti vantaggiosi dei due metodi FEM e FDM, fornendo una matrice di massa diagonale ed un sistema risolvibile esplicito, pur operando su griglie non strutturate.

## 2. Il Metodo delle Celle

Il Metodo delle Celle perviene a risultati analoghi a quelli ottenuti utilizzando il Metodo degli Elementi Finiti (FEM), senza però partire dalle equazioni differenziali, ma scrivendo direttamente in forma discreta le equazioni di bilancio su un complesso duale a quello utilizzato per descrivere la configurazione del sistema.

Contrariamente al FEM, che definisce un'unica mesh di elementi, nella trattazione CM per problemi elastici piani vengono definiti due complessi di celle, uno duale dell'altro, cui associare le variabili del problema in esame. Ogni nodo del complesso primale risulta circondato da una cella del complesso duale (Fig.1).

Le *variabili di configurazione* (spostamenti, velocità, tensore di deformazione, ecc.) vanno associate agli elementi spaziali del complesso primale.

Le *variabili di sorgente* (forze, momenti di quantità di moto, tensore degli sforzi, ecc.) vanno associate al complesso duale.

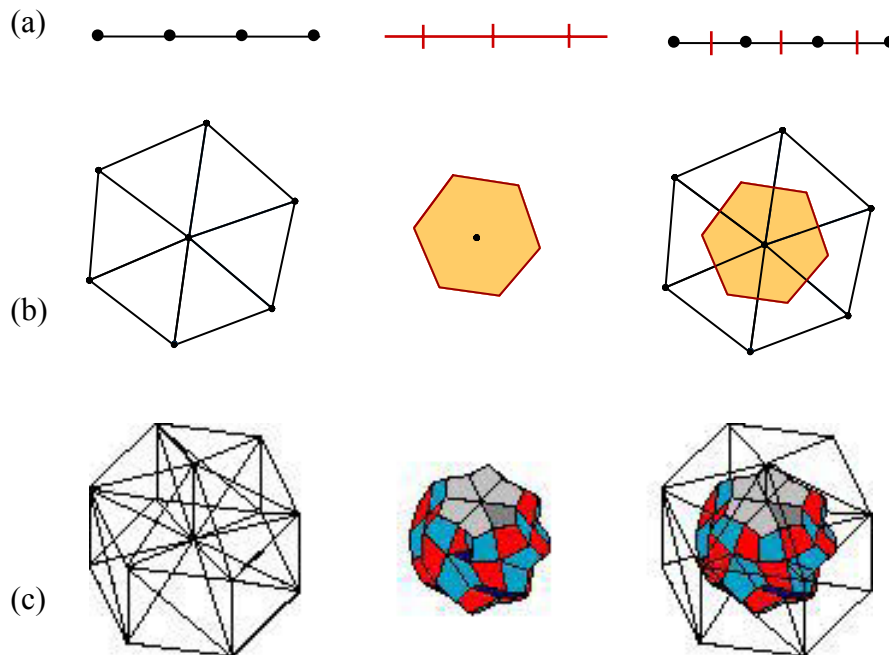


Figura 1. (a), (b), (c): Rispettivamente: complesso primale, duale e loro insieme in 1D, 2D e 3D

## 2.1. Problemi statici

Analogamente al FEM, nel CM il campo degli spostamenti all'interno di una cella primale viene approssimato mediante una funzione appropriata, in questo caso ad andamento lineare, degli spostamenti nodali  $\{u\}_c$ . L'espressione delle componenti del tensore delle deformazioni all'interno della cella  $\{\varepsilon\}_c$  è fornita dalla parte simmetrica del gradiente degli spostamenti:

$$\{\varepsilon\}_c = [B]_c \{u\}_c \quad (1)$$

Applicando la legge di Hooke si ottengono poi le componenti del tensore degli sforzi,

$$\{\sigma\}_c = [D]_c \{\varepsilon\}_c = [D]_c [B]_c \{u\}_c \quad (2)$$

in cui  $[D]_c$  rappresenta la matrice costitutiva a livello locale.

Qui terminano le analogie col FEM. Infatti, avendo introdotto i due complessi, ogni cella duale può essere considerata come una regione di influenza per il nodo che giace al suo interno e l'equazione di bilancio viene scritta direttamente in forma discreta per la regione di influenza di ciascun nodo.

E' quindi necessario ricavare le forze agenti su ciascun lato del poliedro duale che circonda il nodo.

Avendo assunto una funzione interpolante del campo degli spostamenti ad andamento lineare, le componenti dei tensori di tensione e di deformazione sono uniformi all'interno di ciascuna cella primale. Di conseguenza, le componenti della forza di superficie saranno date da (Fig.2):

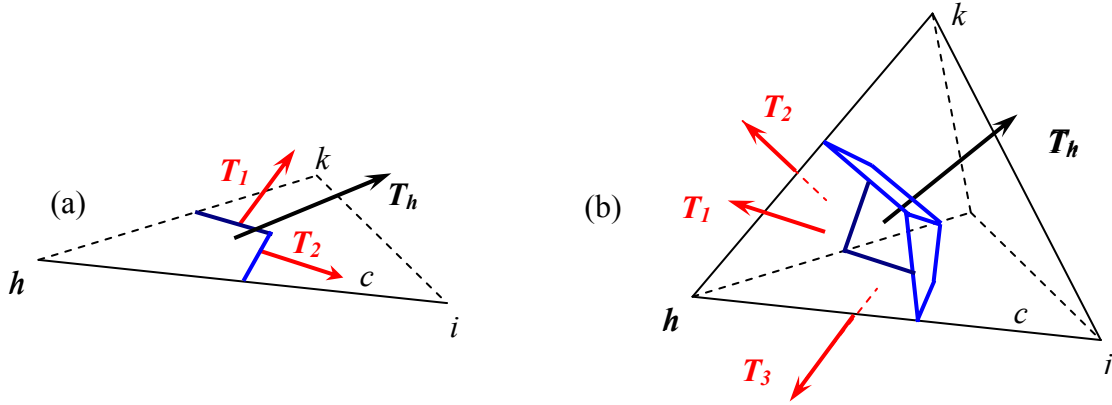


Figura 2. (a), (b): Rispettivamente: forze agenti attraverso i lati della regione di influenza del nodo  $h$  in 2D e 3D

$$\begin{Bmatrix} T_{hx} \\ T_{hy} \end{Bmatrix}_c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{hx} & 0 & A_{hy} \\ 0 & A_{hy} & A_{hx} \end{bmatrix}_c \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_c \quad \text{in 2D,} \quad (3.a)$$

$$\begin{Bmatrix} T_{hx} \\ T_{hy} \\ T_{hz} \end{Bmatrix}_c = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} A_{hx} & 0 & 0 & A_{hy} & 0 & A_{hz} \\ 0 & A_{hy} & 0 & A_{hx} & A_{hz} & 0 \\ 0 & 0 & A_{hz} & 0 & A_{hy} & A_{hx} \end{bmatrix}_c \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_c \quad \text{in 3D,} \quad (3.b)$$

in cui con  $A_{hx}$  e  $A_{hy}$  si sono indicate le componenti delle aree del lato della cella opposto al nodo  $h$ .

Raccogliendo, per tutti i nodi della cella

$$\{T\}_c = -tA_c [B]_c^T [D]_c [B]_c \{u\}_c \quad \text{in 2D,} \quad (4.a)$$

$$\{T\}_c = -V_c [B]_c^T [D]_c [B]_c \{u\}_c \quad \text{in 3D,} \quad (4.b)$$

dove  $\{T\}_c$  raccoglie le componenti cartesiane delle forze di superficie ed  $A_c$ ,  $V_c$  sono rispettivamente l'area ed il volume della cella.

A questo punto è possibile scrivere l'equazione di bilancio sulle celle duali (regioni di influenza), direttamente in forma discreta. Posto:

- $\{T_h\}$  forza totale esercitata dalle celle che circondano il nodo  $h$  sulla superficie dell'intera regione di influenza del nodo,  $\{T_h\} = \sum_c \{T_h\}_c$  ;
- $\{F_h\}$  risultante delle forze di volume che agiscono sulla cella duale del nodo  $h$   $\{F_h\}_c$  e delle eventuali forze esterne sulle celle duali di bordo  $\{B_h\}_c$ ,  $\{F_h\} = \sum_c \{F_h\}_c + \sum_c \{B_h\}_c$  ;

la condizione di equilibrio della regione di influenza del nodo  $h$  è

$$\{T_h\} + \{F_h\} = 0 \quad (5)$$

e rappresenta un sistema di equazioni lineari che può essere scritto nella forma

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (6)$$

ed è risolvibile con i metodi usuali.

Si nota quindi che il CM non scrive le equazioni di bilancio per dei punti, i nodi, come il FEM, ma impone la condizione di equilibrio su un volume nell'intorno del nodo, la cella duale, e pertanto utilizza le variabili globali (integrali) per ricavare direttamente una formulazione discreta delle leggi fisiche.

Un'ulteriore caratteristica del CM è che, contrariamente al FEM, al diminuire delle dimensioni della mesh l'errore non aumenta mai, mantenendosi costante nel caso peggiore [9]. Questa prerogativa rende il Metodo delle Celle particolarmente adatto per la valutazione dello stato tensionale e deformativo in presenza di fenomeni locali, quali le concentrazioni di tensione.

Per problemi statici, sia in campo elastico sia plastico, l'accuratezza e l'ordine di convergenza ottenute con il CM sono paragonabili ed in alcuni casi migliori, come precisione e tempi di calcolo, di quelle che si ottengono con il FEM [10, 11].

## 2.2. Problemi dinamici

Per applicare il CM a problemi dinamici, vengono mantenuti i due complessi nello spazio visti per il caso statico, ed anche per l'asse dei tempi è opportuno fare uso di due complessi: primale e duale (Fig.3).

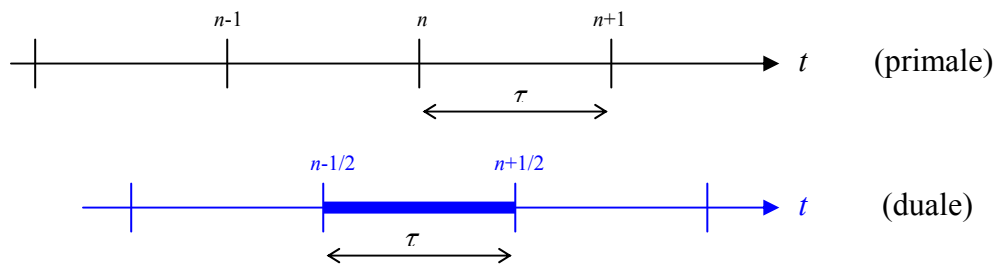


Figura 3. Complessi primale e duale per la variabile tempo

Gli intervalli di discretizzazione nel tempo,  $\tau$ , sono di ampiezza costante. La velocità dei nodi di una cella è definita dall'equazione cinematica

$$\{v\}_c^{n-1/2} = \frac{1}{\tau} [\{u\}_c^n - \{u\}_c^{n-1}] \quad (7)$$

in cui il vettore  $\{u\}_c^n$  racchiude le componenti dello spostamento dei nodi della cella  $c$  all'istante  $n$  del complesso primale nel tempo,  $\{u\}_c^{n-1}$  all'istante  $n-1$  del complesso primale nel tempo e la velocità,  $\{v\}_c^{n-1/2}$ , ricavata dalla differenza tra questi spostamenti, è riferita all'istante centrale dell'intervallo utilizzato per calcolarla, e quindi all'istante  $n-1/2$  del complesso duale.

L'equazione cardinale di bilancio dinamico, per il generico nodo  $h$  diventa

$$\{T_h\}^n + \{F_h\}^n = \frac{1}{\tau} (\{p_h\}^{n+1/2} - \{p_h\}^{n-1/2}), \quad (8)$$

avendo indicato con  $\{p_h\}^{n+1/2}$  e  $\{p_h\}^{n-1/2}$  rispettivamente la quantità di moto della regione di influenza del nodo  $h$ , rispettivamente agli istanti  $n+1/2$  e  $n-1/2$  del complesso temporale duale.

Con le opportune sostituzioni e scrivendo le relazioni per tutti i nodi si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \{u_h\}^n = \{u_h\}^{n-1} + \tau[M]^{-1}\{p_h\}^{n-1/2} \\ \{p_h\}^{n+1/2} = \{p_h\}^{n-1/2} + \tau([K]\{u\}^n + \{F_h\}^n) \end{cases} \quad (9)$$

che può essere risolto esplicitamente ad ogni passo temporale.

Si nota che il procedimento descritto *non* equivale ad una discretizzazione degli operatori differenziali, infatti le equazioni sono state scritte *direttamente* in forma discreta. La soluzione del sistema (9) fornisce un'approssimazione caratterizzata da un'elevata accuratezza.

La massa della cella duale, moltiplicata per la velocità del baricentro di tale cella, ne fornisce la quantità di moto. Considerando che ogni nodo è praticamente coincidente con baricentro della cella duale che lo circonda, la matrice di massa risulta naturalmente diagonale.

### 3. Risultati

Vengono di seguito riportati i risultati di diverse simulazioni. Per primo è stato eseguito il confronto con un caso di cui è nota in letteratura la soluzione analitica esatta. I risultati ottenuti con il CM sono stati confrontati anche con quelli ottenuti con due programmi FEM di vasto impiego, quali ANSYS ed ABACUS, per modelli 1D, 2D, e 3D. Successivamente è stata analizzata la propagazione di onde in una lastra nei casi di lastra integra, lastra forata e lastra con cricca.

#### 3.1. Vibrazioni longitudinali dell'asta libera

Per valutare la bontà della soluzione ottenibile dall'analisi transitoria con il metodo delle celle, è stato utilizzato un problema di cui è nota in letteratura la soluzione analitica esatta. Il problema trattato è quello delle vibrazioni longitudinali indotte in un'asta con le estremità libere dall'applicazione repentina di un carico ad una delle estremità (Fig.4).



Figura 4. Modello del problema

Problemi di questo tipo si incontrano nello studio delle vibrazioni che si producono durante il sollevamento di sonde e trivelle particolarmente lunghe, quali ad esempio quelle utilizzate nei pozzi petroliferi.

Lo spostamento dell'estremità dell'asta nella quale il carico  $P$  viene applicato è dato da [12]

$$(u)_{x=l} = \frac{t^2 P}{2\rho l A} + \frac{2l P}{\pi^2 a^2 \rho A} \sum_{i=1,3,5,\dots} \frac{1}{i^2} \left( 1 - \cos \frac{i\pi a t}{2l} \right) \quad (10)$$

in cui  $t$  è il tempo trascorso dall'applicazione del carico,  $\rho$  è la massa volumica del materiale che costituisce l'asta,  $l$  ed  $A$  sono rispettivamente la lunghezza e l'area della sezione dell'asta ed  $a = \sqrt{E/\rho}$  è la velocità del suono nel materiale che costituisce l'asta.

Dalla (10) si vede che l'applicazione repentina della forza  $P$  produce tutti i modi di vibrare dell'asta. L'allungamento per  $t=l/a$ , corrispondente a metà del primo periodo fondamentale di vibrazione, vale

$$(u)_{x=l} = \frac{Pl}{2AE} + \frac{4Pl}{\pi^2 AE} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) = \frac{Pl}{AE}. \quad (8)$$

In questo istante, quindi, lo spostamento dell'estremità dell'asta è uguale a quello provocato dal carico di trazione  $P$  applicato staticamente.

I dati del problema esaminato sono riportati in Tabella 1.

Tabella 1. Dati del problema

Materiale	Geometria	Carico
modulo elastico $E = 210$ GPa	lunghezza $l = 21$ m	$P = 840$ kN
densità $\rho = 7600$ kg/m <sup>3</sup>	area della sezione $A = 0.7$ m	

Per l'analisi numerica sono stati utilizzati modelli mono-, bi- e tri-dimensionali e i confronti sono stati eseguiti utilizzando le stesse mesh per i programmi FEM ed per il CM. Per l'analisi monodimensionale l'asta è stata divisa in 16 elementi (17 nodi).

L'analisi piana è stata condotta su 3 diversi modelli. Sono stati utilizzati triangoli a 3 nodi, disposti a formare una discretizzazione strutturata nei primi due (con diversi gradi di infittimento) e di Delaunay nel terzo.

L'analisi 3D è stata anch'essa condotta su 2 modelli, impiegando tetraedri a 4 nodi disposti secondo una discretizzazione strutturata e di Delaunay rispettivamente. La Tabella 2 riassume le caratteristiche delle mesh utilizzate.

Tabella 2. Discretizzazioni

	1D	2D - 1 triangoli 3nodi strutturata	2D - 2 triangoli 3nodi strutturata	2D - 3 triangoli 3nodi Delaunay	3D - 1 tetraedri 4nodi Delaunay	3D - 2 tetraedri 4nodi strutturata
nodi	17	605	183	186	456	732
celle/elementi	16	960	240	246	1051	2160

Considerando per primi i risultati ottenuti con il modello monodimensionale, in Tabella 3 sono riportati i valori dello spostamento del nodo all'estremità cui è applicato il carico dopo un tempo  $T = 4$  ms, corrispondente a metà del primo periodo fondamentale di vibrazione (pari a 8 ms in teoria ed a 8.0024 ms dal calcolo degli autovalori con il CM). Il passo di integrazione nel tempo utilizzato in queste simulazioni è  $\Delta t = 0.2$  ms.

Tabella 3. Spostamento (mm) del nodo all'estremità cui è applicato il carico, per  $T = 4$  ms

Teoria	ANSYS	ABAQUS	CM
0.12000	0.11717	0,11982	0.12006
errore	-2.35 %	- 0.15 %	0.05 %

Sempre per questo modello, in Fig. 4 sono riportati i valori dello spostamento  $u_x$  del nodo all'estremità libera (nodo 1,  $x = 0$ ), dell'estremità cui è applicato il carico (nodo 17,  $x = l$ ) e del nodo centrale (nodo 9,  $x = l/2$ ), calcolati con i diversi metodi.

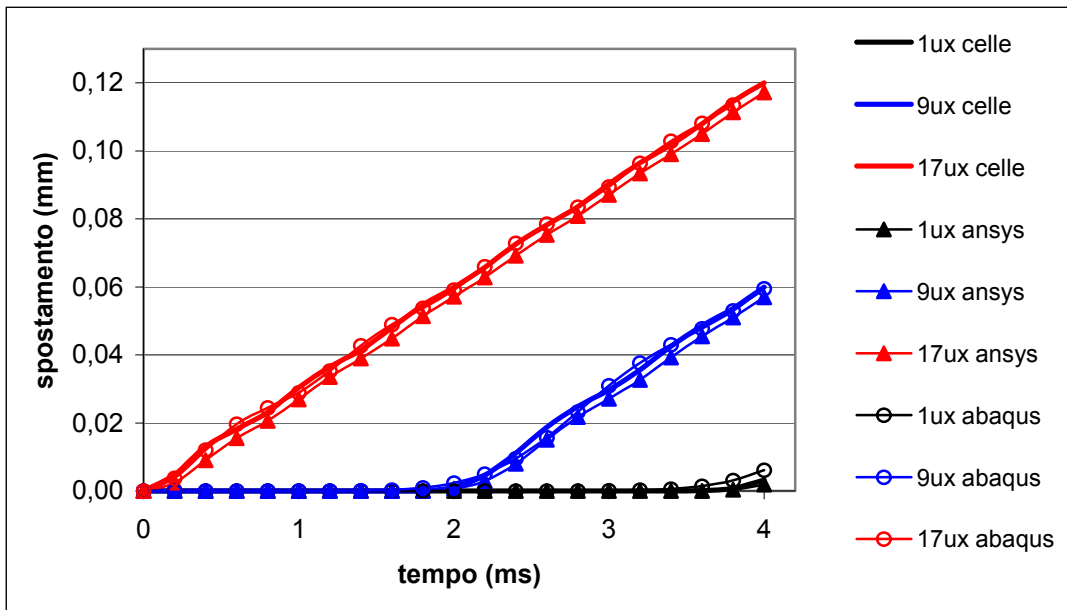


Figura 5. Spostamenti nel nodo 1,  $x = 0$ , nodo 17,  $x = l$ , e nel nodo 9,  $x = l/2$

Nelle Figure 6 – 8 sono rispettivamente riportati i valori delle velocità nel nodo 1,  $x = 0$ , nodo 17,  $x = l$ , e nel nodo 9,  $x = l/2$ , calcolati con il Metodo delle Celle, con ANSYS e con ABAQUS.

E' da notare che, mentre per le analisi con ANSYS è stata impiegata per l'analisi una matrice di massa che ha subito un processo di riduzione (lumping) [13], nelle analisi con ABAQUS è stato risolto il sistema implicito ad ogni passo, e la soluzione è stata ricavata iterativamente con il metodo di Newton [14]. Invece, come già stato menzionato prima, il sistema risolvibile che si ricava con il Metodo delle Celle è un sistema esplicito, che non richiede tale processo. Inoltre, mentre con ANSYS ed ABAQUS la velocità viene ricavata come derivata numerica degli spostamenti nodali, con il Metodo delle Celle viene calcolata esplicitamente dalla quantità di moto.

Per i modelli 2D e 3D è stato eseguito solo il confronto tra i risultati ottenuti con il Metodo delle Celle ed ABAQUS. In tutti i casi il carico è stato applicato come una pressione distribuita sull'estremità, ed il valore dello spostamento è stato calcolato come valore medio degli spostamenti dei nodi all'estremità  $x = l$  dove è applicato il carico. Il passo di integrazione nel tempo utilizzato in queste simulazioni è  $\Delta t = 0.02$  ms. I risultati delle simulazioni sono riassunti in Tabella 4. Si può notare come i risultati praticamente non dipendano dal numero di elementi o di nodi utilizzati. Considerato inoltre che le mesh 2D – 2 e 2D – 3 hanno un numero di nodi sui lati paragonabile a quello delle mesh 3D, si può osservare che la soluzione CM offre un risultato più stabile al cambiare del tipo di elemento.

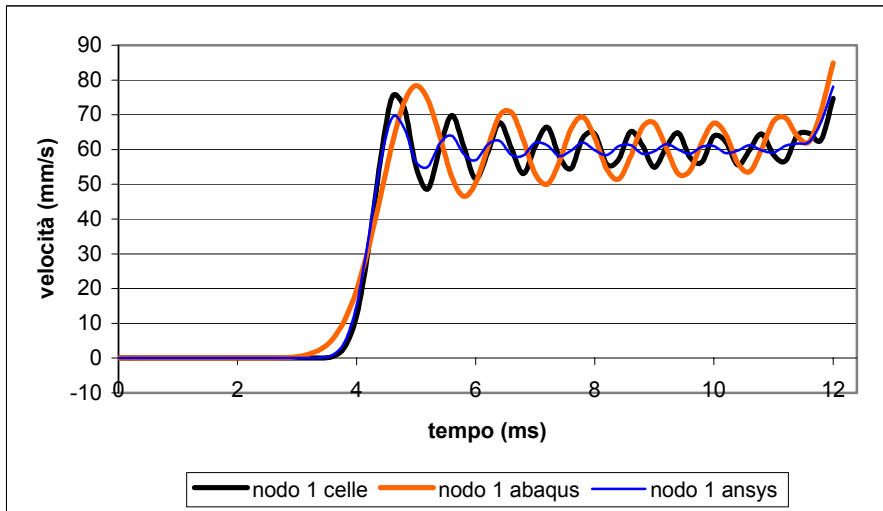


Figura 6. Velocità nel nodo 1,  $x = 0$

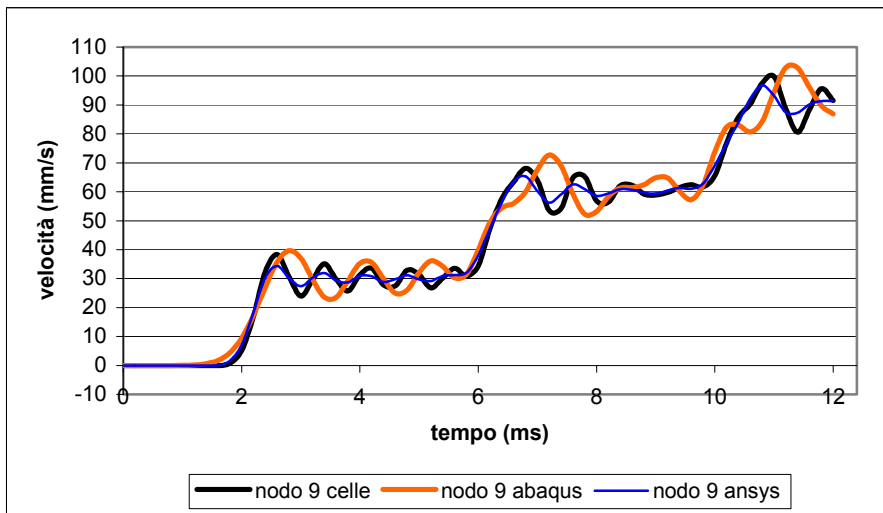


Figura 7. Velocità nel nodo 9,  $x = l/2$

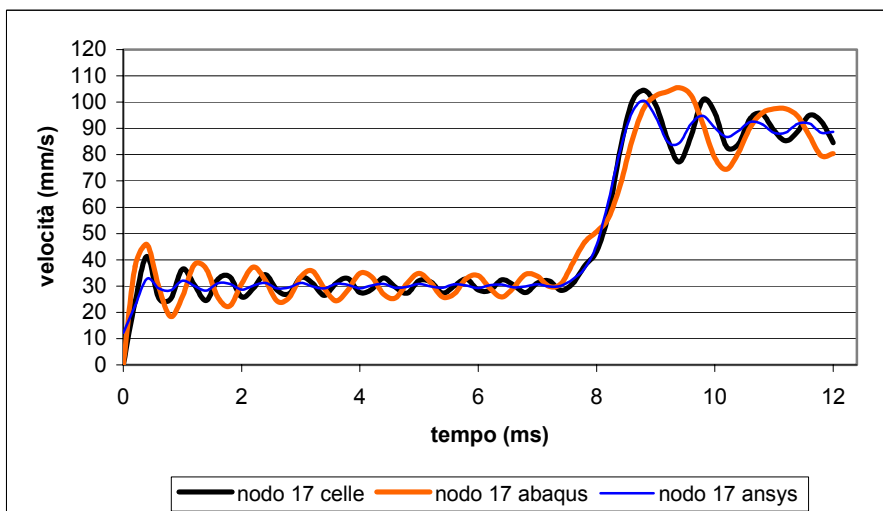


Figura 8. Velocità nel nodo 17,  $x = l$

Tabella 4. Spostamento (mm) medio dei nodi all'estremità  $x = l$

	2D – 1 triangoli 3 nodi strutturata	2D – 2 triangoli 3 nodi strutturata	2D – 3 triangoli 3 nodi Delaunay	3D – 1 tetraedri 4 nodi Delaunay	3D – 2 tetraedri 4 nodi strutturata
nodi	605	183	186	456	732
ABAQUS	0.117680	0.117867	0.117933	0.120115	0.120217
CELLE	0.120109	0.120192	0.120036	0.120179	0.120216

Nelle Figure 9 – 13 sono riportati gli andamenti degli spostamenti nodali per  $T = 4$  ms e le mesh utilizzate nelle simulazioni.

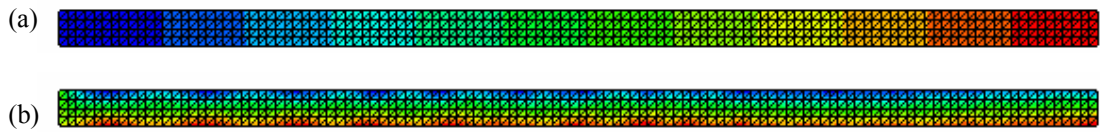


Figura 9. Modello 2D – 1: spostamenti nodali (a) lungo x, direzione di applicazione del carico, (b) lungo y

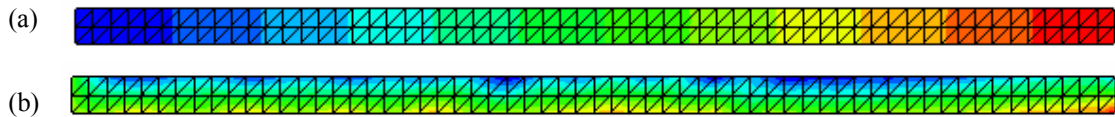


Figura 10. Modello 2D – 2: spostamenti nodali (a) lungo x, direzione di applicazione del carico, (b) lungo y

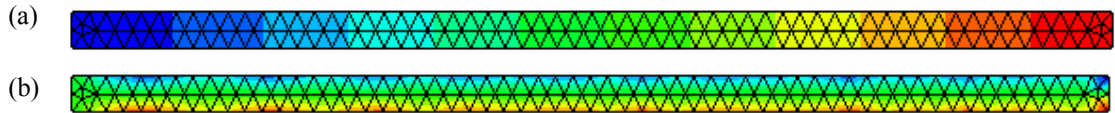


Figura 12. Modello 2D – 3: spostamenti nodali (a) lungo x, direzione di applicazione del carico, (b) lungo y

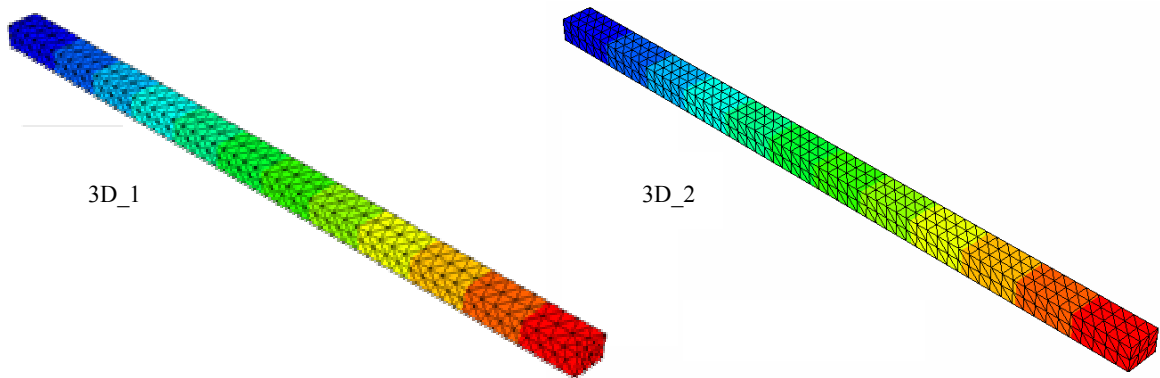


Figura 13. Modello 3D – 1 e 3D – 2: spostamenti nodali lungo x, direzione di applicazione del carico

### 3.2. Propagazione di onde

Il Metodo delle Celle è stata successivamente utilizzato, al fine di dimostrarne le potenzialità, per la simulazione della propagazione di onde quali quelle generate da attuatori piezoelettrici, nei casi di lastra integra, lastra forata e lastra con cricca.

Indicato con  $t$  il tempo trascorso dall'inizio della simulazione, nelle simulazioni sono stati utilizzati sempre segnali con andamento sinusoidale  $F_x(t) = F_0 \sin(\pi \omega t)$ , anche se con parametri diversi. Le dimensioni della mesh vincolano la lunghezza d'onda minima del segnale che si può propagare ad essere pari almeno a 2 volte la distanza tra i nodi, ma per poter riprodurre correttamente la forma dell'onda è opportuno ricorrere ad un maggior numero di nodi nella direzione di propagazione.

Il modello del problema è quello raffigurato il Fig.14.

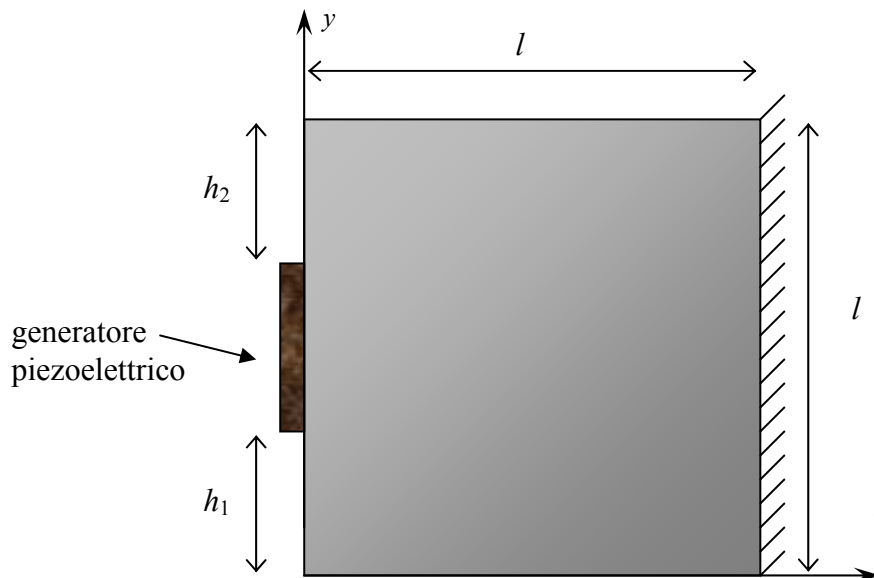


Figura 14. Modello del problema di propagazione

La mesh utilizzata nella simulazione per lastra integra ha 5041 nodi e 9800 celle ed è una mesh strutturata. Il passo di integrazione nel tempo è 0.002 ms.

Nella simulazione per la lastra integra, il segnale consiste in metà onda. I parametri del modello impiegato sono riportati in Tabella 5.

Tabella 5. Dati della simulazione per lastra integra

Segnale	durata 0.01 ms	$F_0 = 100 \text{ N}$	$\omega = 50 \text{ KHz}$
Materiale	modulo elastico $E = 210 \text{ GPa}$	densità $\rho = 7600 \text{ kg/m}^3$	
Geometria	lato $l = 1.4 \text{ m}$	$h_1 = h_2 = 0.4 \text{ m}$	

Nelle Figure 15 e 16 sono rispettivamente rappresentati gli spostamenti lungo  $x$  (onde  $p$ ) e gli spostamenti lungo  $y$  (onde  $s$ ) per  $t$  pari a 0.08 ms, 0.16 ms, 0.24 ms (corrispondente a 40, 80 e 120 passi di integrazione).

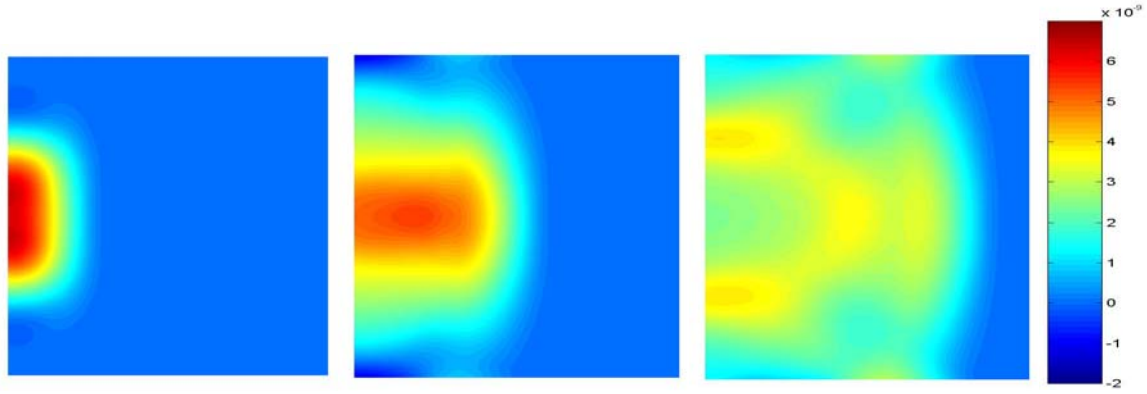


Figura 15. Lastra integra: spostamenti lungo  $x$  (onde  $p$ ) dopo 0.08 ms, 0.16 ms, 0.24 ms

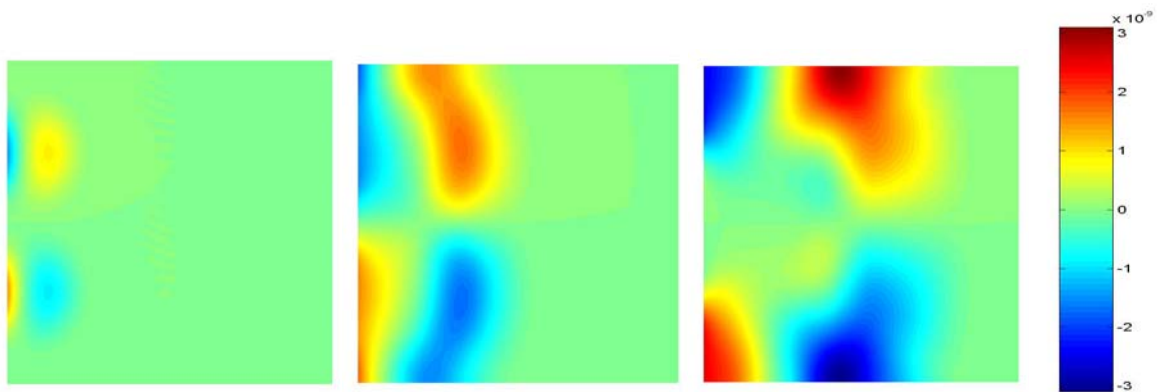


Figura 16. Lastra integra: spostamenti lungo  $y$  (onde  $s$ ) dopo 0.08 ms, 0.16 ms, 0.24 ms

La mesh utilizzata nella simulazione nel caso di lastra con foro ha 5367 nodi e 10390 celle ed è una discretizzazione di Delaunay. Il passo di integrazione nel tempo è  $5E-5$  ms. I parametri del modello impiegato sono riportati in Tabella 6. Il segnale utilizzato consiste di 10 onde complete.

Tabella 6. Dati della simulazione per lastra integra

Segnale	durata 0.1 ms	$F_0 = 100$ N	$\omega = 2$ MHz
Materiale	modulo elastico $E = 210$ GPa	densità $\rho = 7600$ kg/m <sup>3</sup>	
Geometria	diametro del foro $d = 0.4$ m	lato $l = 1.4$ m	$h_1 = h_2 = 0.4$ m

Nelle Figure 17 e 18 sono rispettivamente rappresentati gli spostamenti lungo  $x$  (onde  $p$ ) per  $t$  pari a 0.005 ms, 0.025 ms, 0.05 ms, 0.075 ms, 0.1 ms, 0.125 ms, 0.15 ms, 0.175 e 0.2 ms (corrispondenti a 100, 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 3500 e 4000 passi di integrazione), e gli spostamenti lungo  $y$  (onde  $s$ ) per  $t$  pari a 0.05 ms, 0.1 ms, 0.15 ms (corrispondenti a 1000, 2000 e 3000 passi di integrazione).

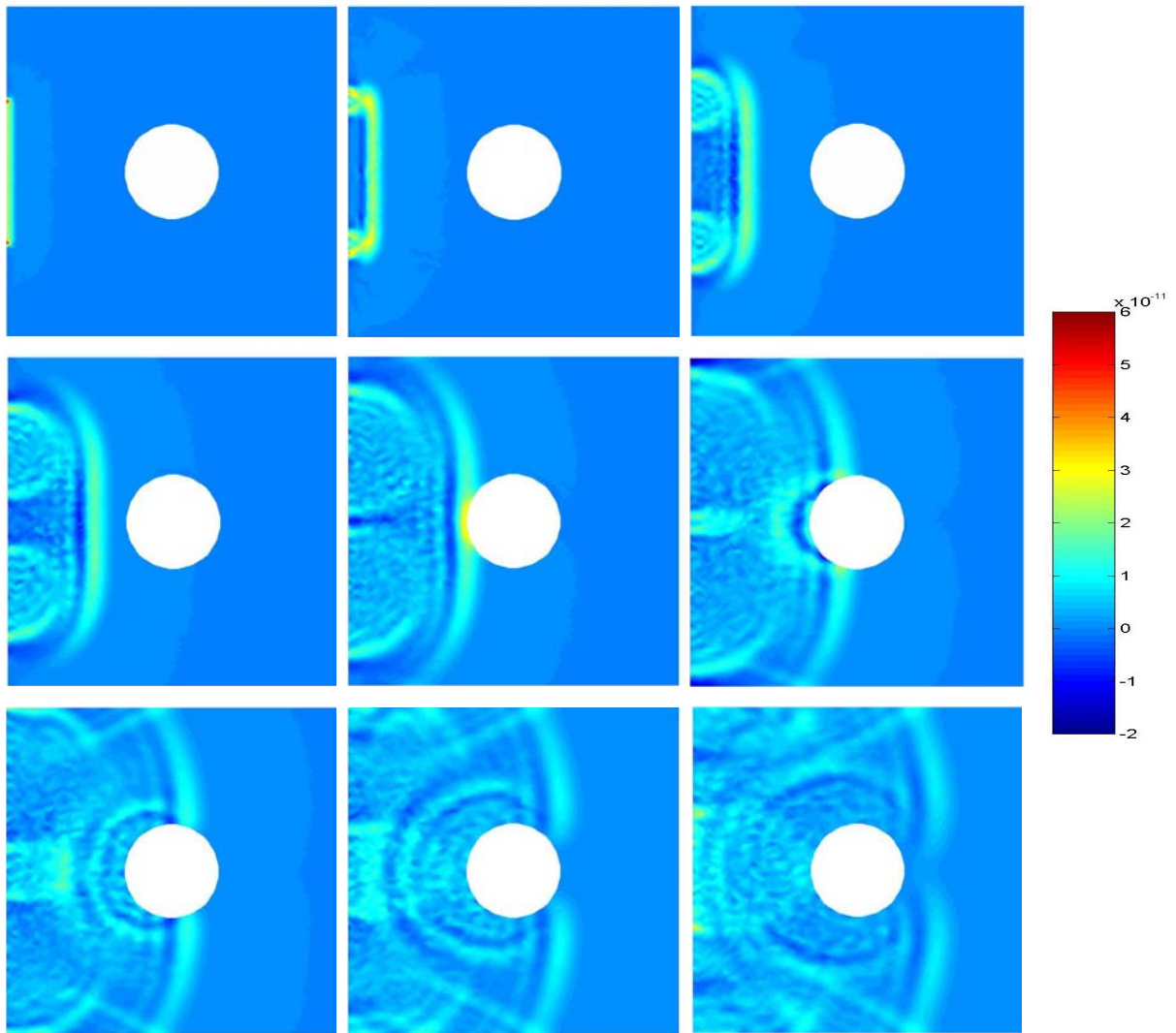


Figura 17. Lastra forata: spostamenti lungo  $x$  (onde  $p$ ) dopo 0.005 ms, 0.025 ms, 0.05 ms, 0.075 ms, 0.1 ms, 0.125 ms, 0.15 ms, 0.175 e 0.2 ms

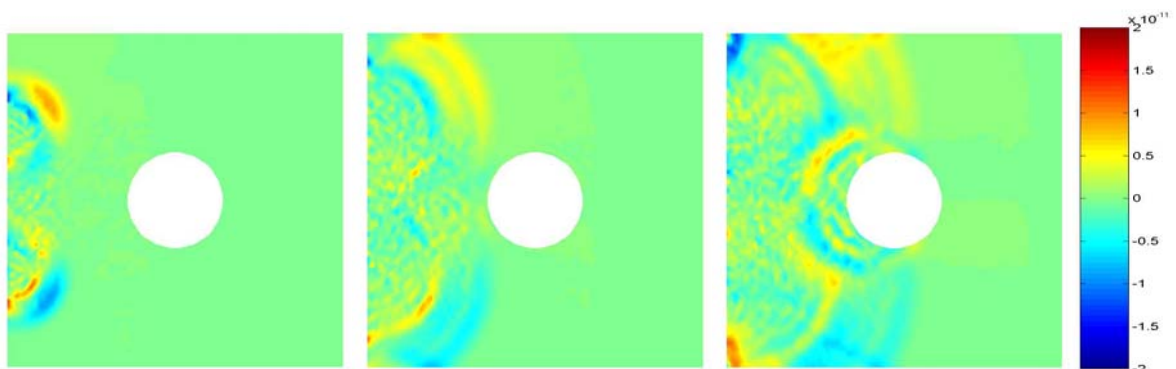


Figura 18. Lastra forata: spostamenti lungo  $y$  (onde  $s$ ) dopo 0.05 ms, 0.1 ms, 0.15 ms

Nella simulazione nel caso di lastra con cricca questa ha forma romboidale. La mesh utilizzata ha 4204 nodi e 8200 celle ed è una discretizzazione di Delaunay. Il passo di integrazione nel tempo è  $5E-5$  ms. La lunghezza d'onda impiegata è più piccola delle dimensioni del difetto, in modo da consentire l'osservazione di un'interazione sensibile. I parametri del modello impiegato sono riportati in Tabella 7. Il segnale utilizzato consiste di 10 onde complete.

Tabella 7. Dati della simulazione per lastra integra

Segnale	durata 0.1 ms	$F_0 = 100$ N	$\omega = 2$ MHz
Materiale	modulo elastico $E = 210$ GPa	densità $\rho = 7600$ kg/m <sup>3</sup>	
Geometria lastra	lato $l = 1$ m	$h_1 = h_2 = 0.3$ m	
Geometria cricca	altezza 0.04 m	larghezza 0.01 m	

In Fig. 19 sono rappresentati gli spostamenti lungo  $x$  (onde  $p$ ) per  $t$  pari a 0.05 ms, 0.1 ms e 0.1125 ms, corrispondenti a 1000, 2000 e 2250 passi di integrazione. La cricca risulta evidenziata dall'interazione tra le onde e la superficie di frattura.

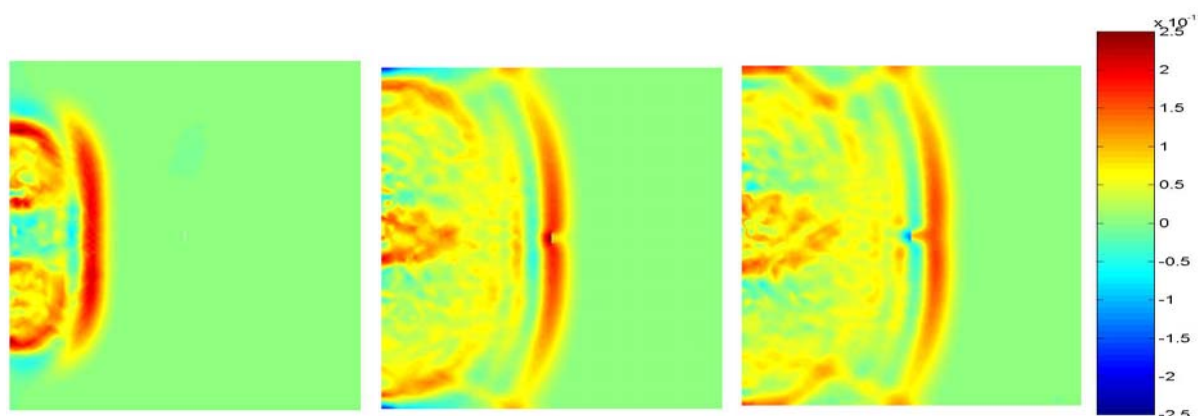


Figura 19. Lastra con cricca: spostamenti lungo  $x$  (onde  $p$ ) dopo 0.05 ms, 0.1 ms, 0.1125 ms

## 4. Conclusioni

E' stata presentata l'applicazione del Metodo delle Celle a problemi di elasto-dinamica, ed è stato dimostrato come questo metodo sia in grado di combinare gli aspetti vantaggiosi dei metodi degli Elementi Finiti e delle Differenze Finite, fornendo una matrice di massa diagonale ed un sistema risolvibile esplicito, pur utilizzando anche griglie non strutturate.

Sono stati illustrati i risultati di diverse simulazioni, ed i confronti con due programmi FEM di vasto impiego, quali ANSYS ed ABAQUS hanno permesso di apprezzare il metodo proposto anche in termini di accuratezza della soluzione.

Ulteriori esempi illustrati, volti a dimostrare le potenzialità del metodo, hanno riguardato la simulazione della propagazione di onde, quali quelle generate da un attuatore piezoelettrico, nei casi di lastra integra, lastra forata e lastra con cricca di piccole dimensioni.

## Bibliografia

- [1] D. Hitchings (ed.), "A Finite Element Dynamics Primer", NAFEMS, Glasgow (GB), 1992
- [2] Tonti E., "Formulazione Finita delle Equazioni di Campo: il Metodo delle Celle", Atti del XIII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale, Brescia, Italy, 2000
- [3] Tonti, E., "A Direct Discrete Formulation of Field Laws: The Cell Method", CMES, Vol. 2, N.2, 2001, pp. 237-258
- [4] Cosmi F., "Application of the Cell Method in Elasticity Problems" WCCM V, Fifth World Congress on Computational Mechanics, Vienna, Austria, 2002
- [5] Cosmi F., Di Marino F., "Modelling of the Mechanical Behaviour of Porous Materials: A New Approach", Acta of Bioengineering and Biomechanics, Vol.3, No.2, 2001
- [6] Cosmi F., Dreossi D., Vittur F. "Applicazione del Metodo delle Celle alla simulazione del comportamento meccanico dell'osso trabecolare" Atti del XXXI Convegno Nazionale AIAS, Parma, Italy 18-21.09.2002
- [7] <http://www.dic.units.it/perspage/discretephysics/>
- [8] Marrone M., Frasson A.M.F. Hernández-Figueroa H.E., "A Novel Numerical Approach for Electromagnetic Scattering: The Cell Method", Proceedings of the 2002 IEEE AP-S and URSI, San Antonio, Texas, USA, Vol. 1, June 16-21, 2002, pp. 160-163
- [9] Zovatto, L., "Ordine di convergenza superiore in un approccio discreto", Proc. GIMC 2000, Brescia, Italy, 2000, pp. 622-643
- [10] Cosmi F., "Numerical solution of Plane Elasticity Problems with the Cell Method", CMES, Vol.2, No.3, 2001, pp. 365-372
- [11] Cosmi F., "Elasto-Plasticità col metodo delle celle", Atti del XXX Convegno Nazionale AIAS, Alghero, Italy, 12-15.09.2001
- [12] Timoshenko, S., Young, D.H., "Vibration Problems in Engineering", 3<sup>rd</sup> ed., D. Van Nostrand Co., Inc. New York, 1955, p. 309-311
- [13] ANSYS Analysis Guide
- [14] ABAQUS Standard User's Manual