

ANALISI DI SEGNALI BIOLOGICI

A.Accardo
accardo@units.it

LM Neuroscienze A.A. 2010-11

Parte II

Analisi in frequenza di un segnale

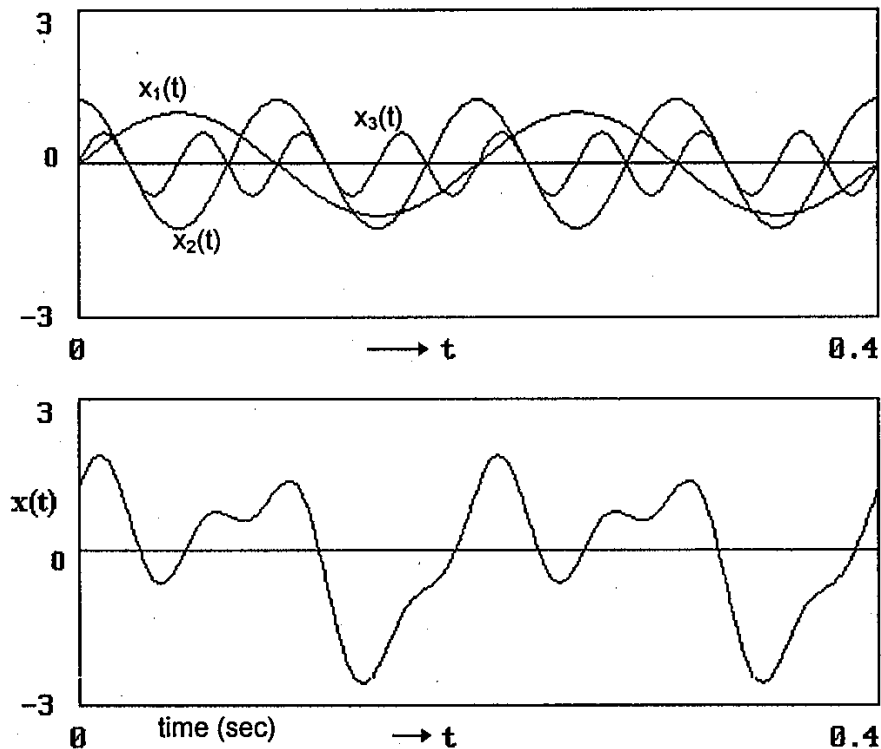
- l'analisi in frequenza di un segnale o analisi di **Fourier** descrive il segnale $y(t)$ come **somma di sinusoidi** in numero eventualmente illimitato
- verrà inizialmente considerato il caso di un segnale periodico di periodo T ; questo mediante la **serie di Fourier** viene descritto come somma di coseni e seni con frequenza pari alla frequenza fondamentale $f_1=1/T$ e con frequenza multipla (componenti armoniche) $f_k=k/T$.
- la **trasformata di Fourier** generalizza questo concetto a funzioni aperiodiche.

Scomposizione di funzioni periodiche

- consideriamo un segnale con periodo 0.2 sec (freq. fondamentale 5 Hz) costituito da 3 armoniche:

$$y(t) = \sin(2\pi \cdot 5 \cdot t) + 1.25 \cos(2\pi \cdot 10 \cdot t) + 0.6 \sin(2\pi \cdot 20 \cdot t)$$

- si nota che l'andamento del segnale su un periodo descritto dal valore di y per tutti i valori reali $0 \leq t < 0.2$ viene riassunto da solo 3 valori, le ampiezza delle armoniche

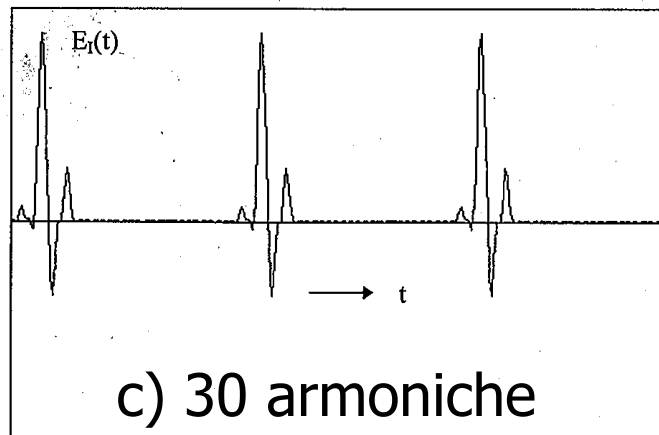
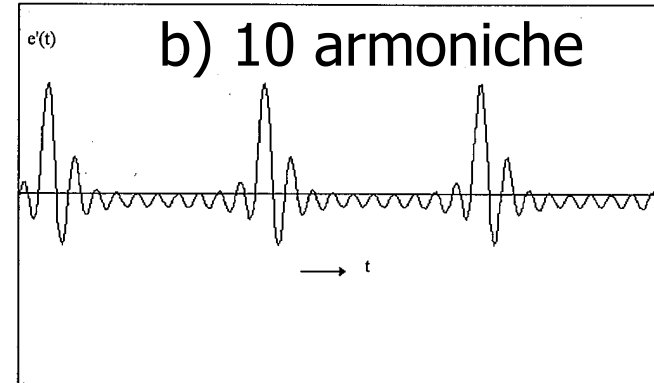
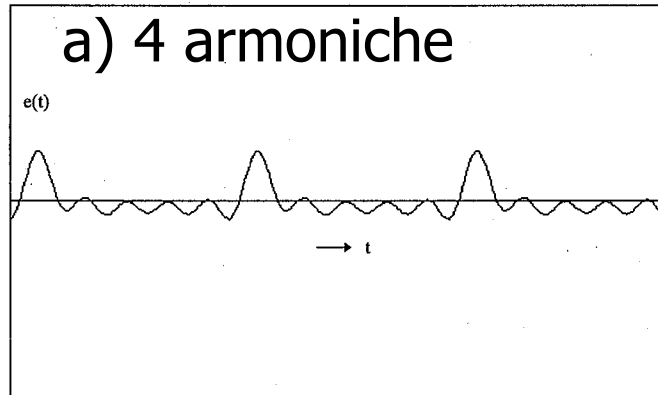


Scomposizione di funzioni periodiche

- in generale qualsiasi segnale periodico, che presenti un numero limitato di discontinuità, è descrivibile mediante la somma di coseni e seni di frequenza multipla di una fondamentale ($1/T$)
- la serie (illimitata) dei coefficienti costituisce lo sviluppo in **serie di Fourier** del segnale periodico
- se le discontinuità sono tali che il segnale e le sue derivate siano limitati (salti, punti angolosi) i coefficienti della serie di Fourier convergono a 0 per frequenze $\rightarrow \infty$
- questo permette di troncare lo sviluppo con un errore di approssimazione limitato
- vediamo un esempio: segnale ECG

Esempio - scomposizione di un ECG

- esempio di sintesi di un tracciato ECG da un numero crescente di armoniche: a) 4; b) 10; c) 30



- si noti come per riprodurre picchi stretti occorra un gran numero di armoniche

Esempio - scomposizione di un ECG

- le prime 10 armoniche della sintesi di ECG vista preced.:
k=0, componente **continua**; k=1, armonica **fondamentale**;
k=2, , 10, **armoniche superiori**

Table 3-1. Sinusoids for ECG synthesis

Sinusoid number	Frequency	Magnitude	Phase
k	$f_k = k f_o$ (Hz)	p_k (mV)	ϕ_k (radians)
0	0.0	8.000	0.000
1	1.2	12.434	0.912
2	2.4	10.775	1.769
3	3.6	9.121	2.513
4	4.8	8.770	3.165
5	6.0	10.053	3.902
6	7.2	12.066	4.800
7	8.4	13.924	5.799
8	9.6	15.069	0.553
9	10.8	15.143	1.593
10	12.0	14.021	2.610

Forme della serie di Fourier

- per ogni componente armonica si può indicare ampiezza e fase

$$y(t) = m + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) ; \quad \omega_k = 2\pi f_k = 2\pi k f_0$$

- o equivalentemente l'ampiezza della componente in fase, coseno, e della componente in quadratura, seno

$$y(t) = m + \sum_{k=1}^{\infty} [c_k \cos(\omega_k t) + d_k \sin(\omega_k t)]$$

- o ancora i coefficienti complessi, a_k , di esponenziali ad argomento immaginario positivo e negativo

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_k t}$$

$$j = \sqrt{-1} ; \quad a_{-k} = a_k^* \text{ (coniugati)} ; \quad a_0 = m$$

Calcolo dei coefficienti della serie di Fourier

- la forma in fase e quadratura permette di trovare la formula per il calcolo dei coefficienti della serie di Fourier, nota la $y(t)$ su di un periodo, sfruttando l'ortogonalità fra sinusoidi:

$$m = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \quad (\text{valor medio})$$

$$c_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos(\omega_k t) dt \quad ; \quad d_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin(\omega_k t) dt \quad ; \quad k \geq 1$$

Serie di Fourier - trasformata/anti-trasformata

- in conclusione, la rappresentazione degli a_k (numeri complessi) in modulo e fase sull'asse delle pulsazioni per ogni ω_k (opp. sull'asse delle frequenze per ogni f_k) dà una rappresentazione discreta del contenuto in frequenza del segnale periodico ed il calcolo dei coefficienti rappresenta una trasformazione dal dominio del tempo a quello delle frequenze

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

- analogamente, il calcolo dell'andamento di $y(t)$ dai coefficienti costituisce la trasformazione inversa dal dominio delle frequenze a quello del tempo

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_k t}$$

Proprietà della trasformata di Fourier

- **linearità:** $F\{a y_1(t) + b y_2(t)\} = a Y_1(\omega) + b Y_2(\omega)$
comp. additive possono essere trasformate separatamente
- **ritardo τ :** $F\{y(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau} Y(\omega)$
lo sfasamento negativo dovuto al ritardo è **lineare** in ω
- **derivata:** $F\{dy(t)/dt\} = j\omega Y(\omega)$
amplificazione proporzionale ad ω e anticipo di fase di 90°
- **integrale:** $F\left\{\int_{-\infty}^t y(\xi)d\xi\right\} = \frac{1}{j\omega} Y(\omega)$
attenuazione proporzionale ad ω e ritardo di fase di 90°
- **scala temporale:** $F\{y(at)\} = (1/a) Y(\omega/a)$
e.g., restringendo la durata di un impulso si allarga la banda:
approssimativamente, banda [Hz] = $1/\text{durata} [\text{sec}^{-1}]$

Proprietà della trasformata di Fourier

- **simmetria della TdF:** per $y(t)$ reale $Y(-\omega) = Y^*(\omega)$
questo implica: $\text{Re}(Y(-\omega)) = \text{Re}(Y(\omega))$, $\text{Im}(Y(-\omega)) = -\text{Im}(Y(\omega))$,
 $|Y(-\omega)| = |Y(\omega)|$, $\arg(Y(-\omega)) = -\arg(Y(\omega))$
- **fase nulla:** $\arg(Y(\omega)) = 0$ se e solo se $y(-t) = y(t)$
questa proprietà è duale della precedente in quanto alla simmetria nel dominio del tempo corrispondono valori reali nel dominio delle frequenze
- **Th di Parseval:** l'energia del segnale nel tempo è pari all'energia della sua trasformata:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega$$

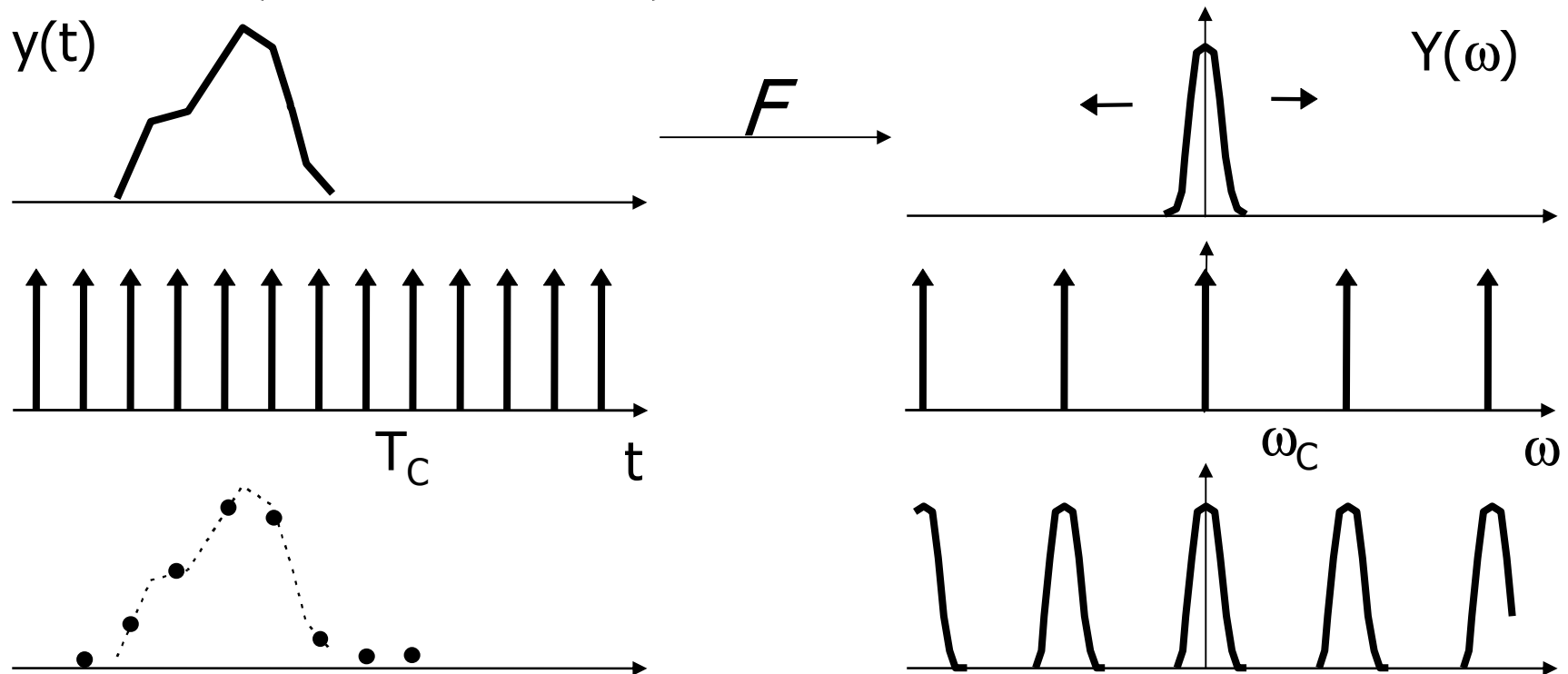
Analisi in frequenza - segnale campionato

- abbiamo visto le definizioni di serie e trasformata di **Fourier** nel dominio del **t. continuo**, ma di fatto i calcoli numerici vengono svolti nel dominio del **t. discreto**

Analisi in frequenza - segnale campionato

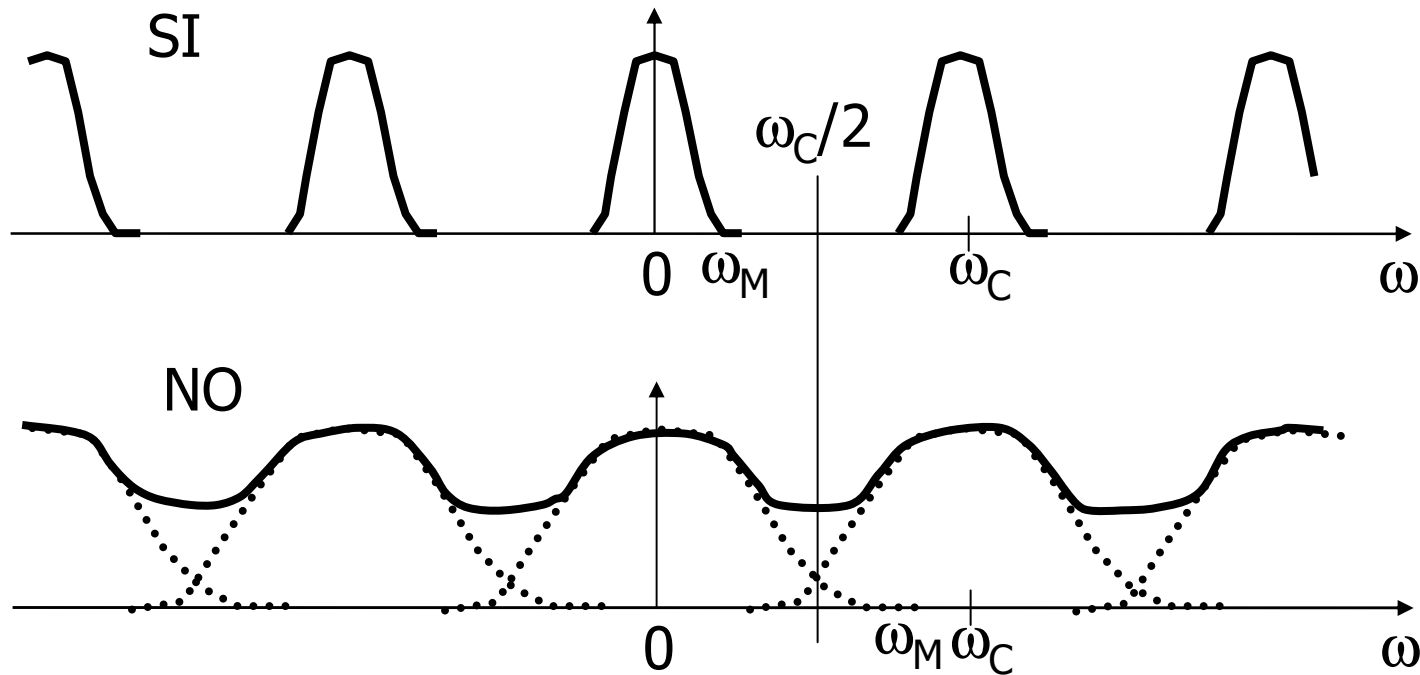
- il risultato del campionamento è quello di replicare $Y(\omega)$ attorno ai multipli di $\omega_C = 2\pi f_C$ sommandoli

$$F \left\{ y(t) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT_C) \right\} = \text{cost.} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(\omega - k\omega_C)$$



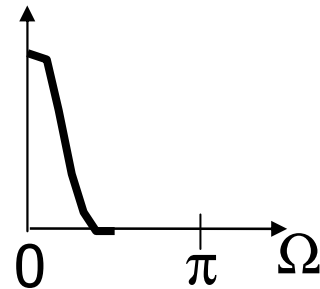
Analisi in frequenza - segnale campionato

- da queste considerazioni discende l'enunciato del **Th. del campionamento** o di **Shannon**:
"la frequenza di campionamento deve essere almeno doppia rispetto alla massima frequenza presente nella banda occupata dal segnale", ovvero $\omega_C > 2\omega_M$



Analisi in frequenza - segnale campionato

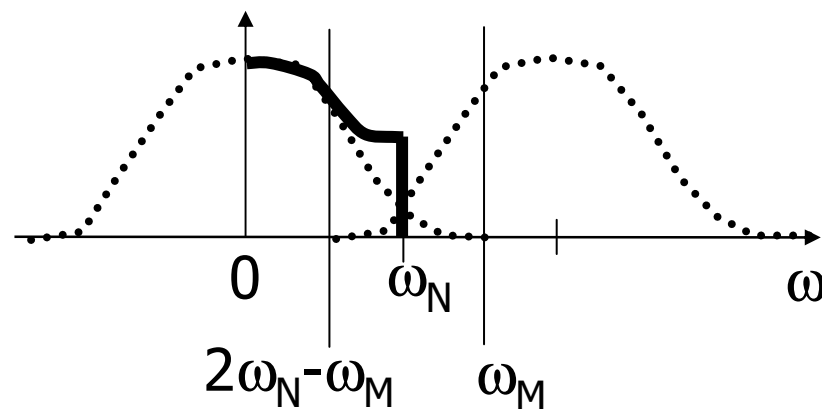
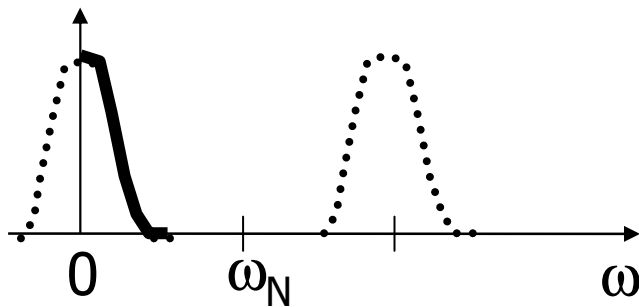
- in altri termini, fissata la frequenza di campionamento, la massima frequenza presente, $f_M = \omega_M / 2\pi$, deve essere minore della metà della frequenza di campionamento $f_N = f_C / 2 = \omega_C / 4\pi$
- in un segnale campionato, dunque, la metà della frequenza di campionamento, f_N , ha il significato di massima frequenza rappresentabile e prende il nome di **frequenza di Nyquist**
- data la simmetria rispetto a 0 e la periodicità rispetto ad f_C , si usa rappresentare il contenuto in frequenza di un segnale campionato da 0 ad f_N ,
ovvero, in termini di frequenza normalizzata f/f_C , da 0 a 0.5,
ovvero, in termini di pulsazione normalizzata Ω , da 0 a π



$$\Omega = 2\pi \omega / \omega_C = 2\pi f / f_C = \omega T_C$$

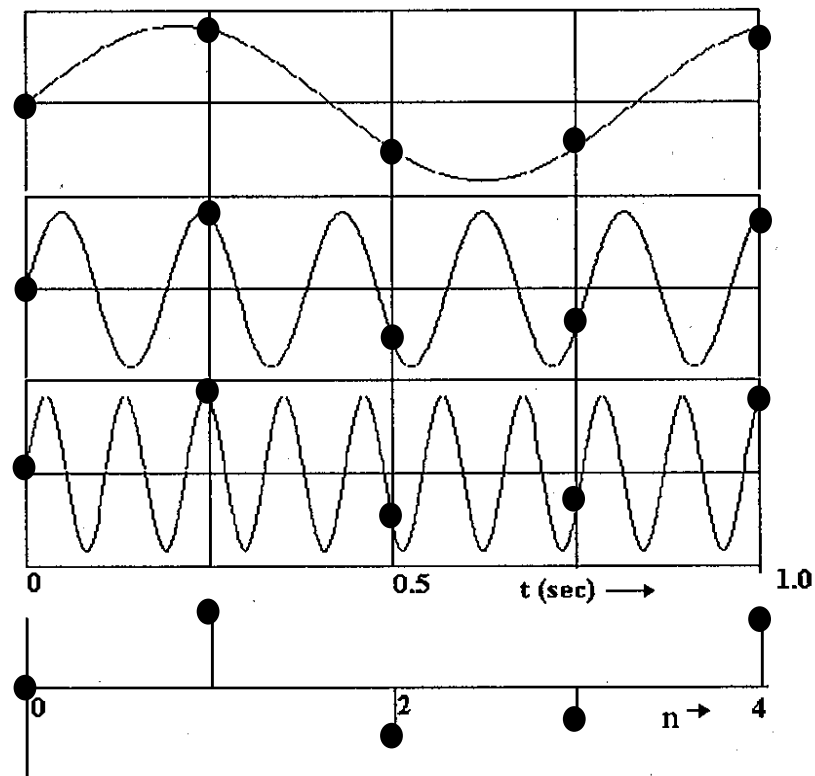
Aliasing

- nei due spettri sono riportati le due situazioni nelle quali la condizione di Shannon viene o meno rispettata, evidenziando lo spettro del segnale campionato da 0 alla freq. di Nyquist
- nel secondo caso, le frequenze da ω_N ad ω_M non solo non sono rappresentate fedelmente ma vengono equivocate e ribaltate nel tratto da $2\omega_N - \omega_M$ a ω_N .



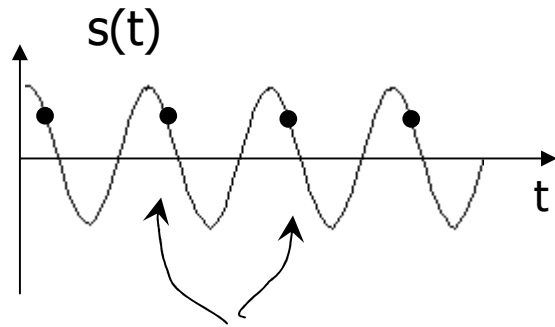
Aliasing: sinusoidi nel tempo

- consideriamo 3 sinusoidi a 1.2, 5.2 e 9.2 Hz tutte campionate a 4 Hz: tutte danno luogo allo stesso campionamento che viene ricostruito a 1.2 Hz

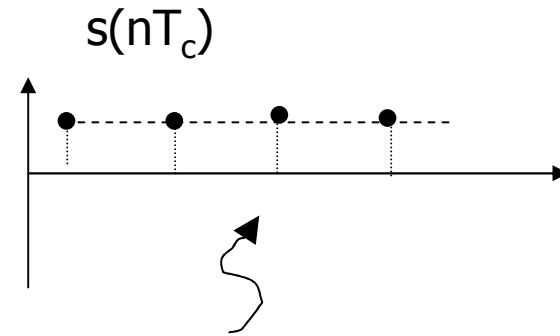


Aliasing

$$s(t) = \sin(2\pi ft), \quad f_c = f \quad (T_c = 1/f)$$

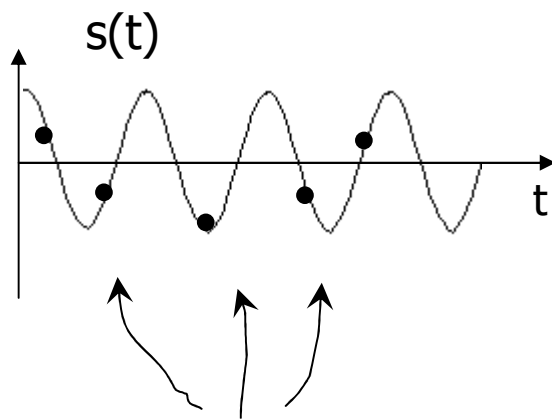


istanti di campionamento

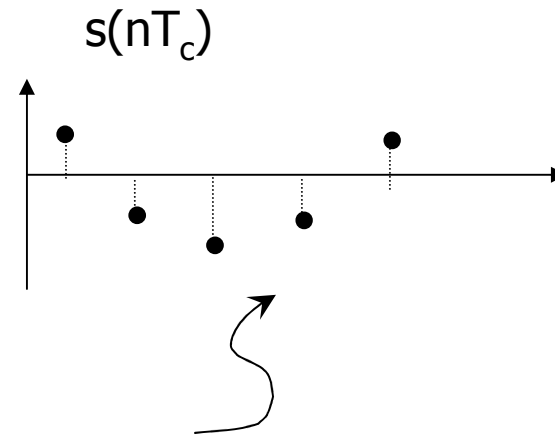


componente costante assente in $s(t)$

$$f < f_c < 2f \quad (1/f > T_c > 1/2f)$$



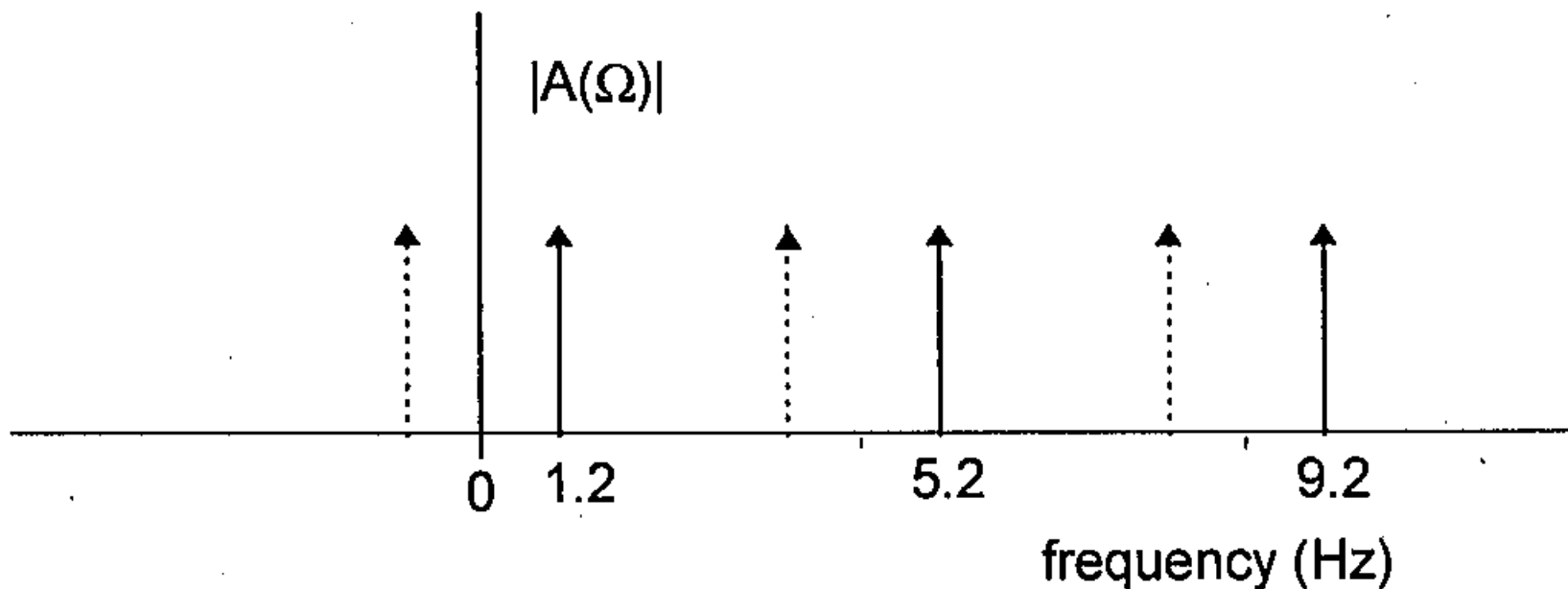
Istanti di campionamento



Oscillazione a bassa frequenza
inesistente nel segnale originale

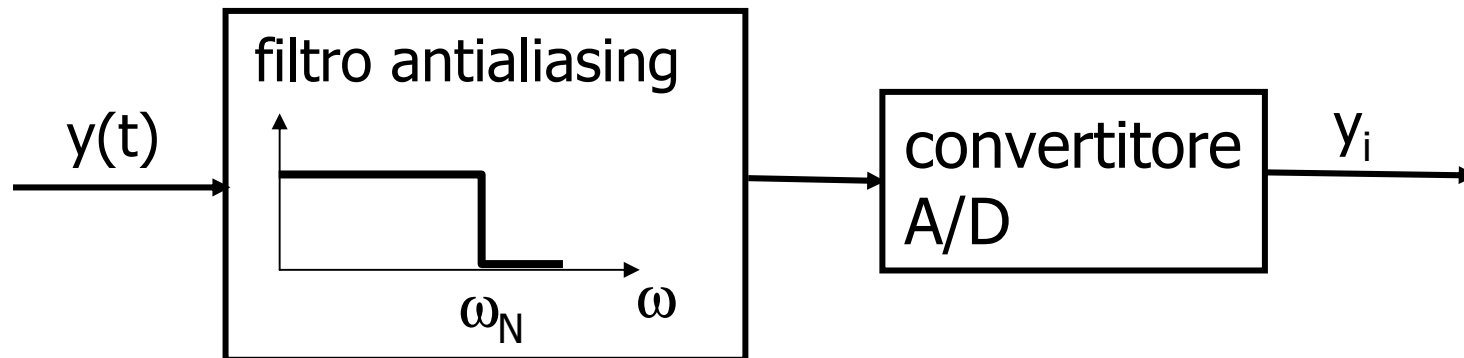
Aliasing: sinusoidi nelle frequenze

- infatti, la Trasf. di Fourier della sinusoide a 1.2 Hz presenta due impulsi a +1.2 e a -1.2 Hz che replicato attorno a 4 Hz per il campionamento dà luogo ad impulsi a $4k-1.2$ e $4k+1.2$ Hz
- 5.2 Hz = $4+1.2$ Hz --> $4(k-1)-1.2$ e $4(k+1)+1.2$ Hz
- 9.2 Hz = $2 \times 4+1.2$ Hz --> $4(k-2)-1.2$ e $4(k+2)+1.2$ Hz
- considerando **tutti i k** troviamo gli **stessi impulsi in freq.**



Filtro anti-aliasing

- avendo scelto una f_c bisogna **eliminare** tutte le componenti eventualmente presenti **oltre la frequenza di Nyquist PRIMA del campionamento**

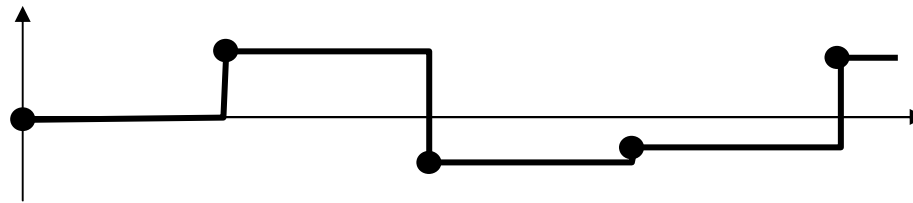


- le componenti eliminate possono essere dovute a rumore oppure a dettagli veloci del segnale che non si vuole (o non si può) registrare

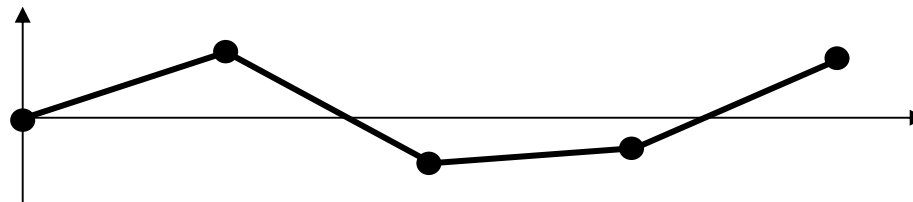
Interpolazione di un segnale campionato

- un modo semplice per ricostruire il segnale nel t. continuo è quello di interpolare fra i punti campionati con una opportuna legge; l'approssimazione varia a seconda del metodo ed il risultato migliora se il segnale è sovracampionato rispetto a quanto imposto dal Th di Shannon

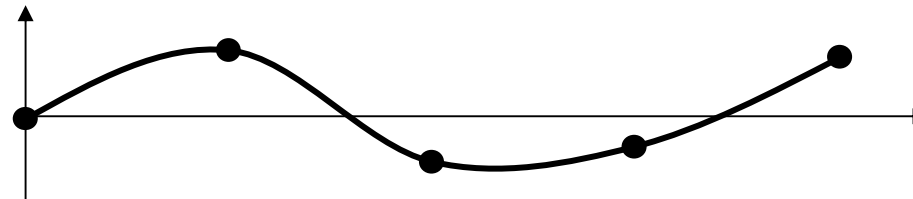
- mantentitore



- interpolazione lineare

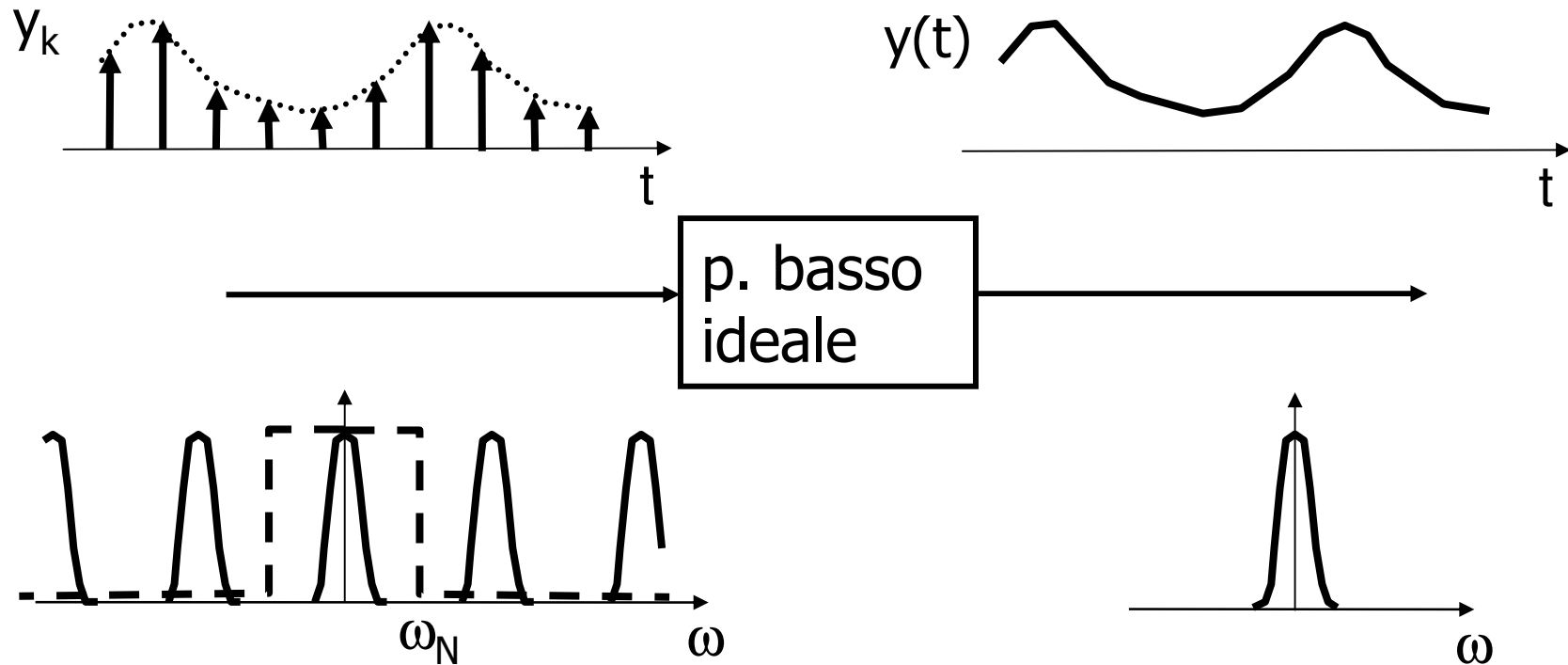


- cubic spline



Ricostruzione ideale

- se il Th. di Shannon è rispettato si può concepire una ricostruzione ideale
- si tratta di eliminare con un filtro passa basso ideale le repliche dello spettro ai multipli della f_c , che il campionamento (modulazione di impulsi) aveva introdotto.



Caratteristiche di alcuni segnali biomedici

SEGNALE	AMPIEZZA	FREQUENZA
ECG	0.1 ÷ 4 mV	0.01 ÷ 250 Hz
EEG	5 ÷ 300 μ V	0.05 ÷ 150 Hz
Potenziali Evocati		
Visivi	alcuni μ V	5 ÷ 50 Hz
Acustici	sotto il μ V	20 ÷ 2000 Hz
Somatosensoriali	alcuni μ V	1 ÷ 2000 Hz
EMG	0.1 ÷ 5 mV	0.01 ÷ 10000 Hz
Respiro	2-50 resp/min	0.1 ÷ 10 Hz

EEG:

Banda passante	Applicazione	Frequenza di campionamento
0.05 ÷ 200 Hz	Diagnostica	500 Hz
0.05 ÷ 100 Hz	Ecg dinamico	250 Hz
0.05 ÷ 50 Hz	Monitoraggio	100 ÷ 200 Hz

Analisi spettrale

- Il contenuto in frequenza di un segnale deterministico oppure stocastico stazionario è messo in evidenza da tracciati ottenuti mediante la trasf. di Fourier che prendono il nome di **spettri** (in analogia col contenuto della luce alle varie lunghezze d'onda)
- a seconda della caratteristica descritta si parla di:
- **spettro di ampiezza**, descrive l'ampiezza delle componenti armoniche (l'uso degli sp. di energia o di potenza è più comune)
- **spettro di fase**, nei segnali deterministici descrive la fase delle componenti armoniche rispetto ad un riferimento temporale fisso; nei segnali stocastici questo non ha senso (almeno in ambito lineare) ma spesso occorre dare lo sfasamento fra la stessa componente armonica di due segnali diversi
- **spettro di energia** descrive l'ampiezza quadratica delle componenti armoniche nei segnali deterministici
- **spettro di potenza**, descrive l'ampiezza quadratica media delle componenti armoniche nei segnali stocastici

Spettro di potenza - processi stocastici stazionari

- sia $y(i)$ un processo a t. discreto, stocastico, stazionario (almeno in senso debole), ergodico ed a media nulla, la varianza è:

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(i)^2$$

- è immediato riconoscere a questa un significato di **potenza** (media di valori quadratici); meno immediato è definire uno spettro di potenza; infatti, non esiste una Serie di Fourier perché non esistono periodicità deterministiche; non esiste una DTFT poiché il segnale è illimitato ed ad energia infinita
- è però intuitivo che oscillazioni che si ripetono in modo statisticamente significativo possano essere stimate, grazie alla ergodicità, anche su un finestra limitata di N campioni
- lo spettro di potenza teorico del processo viene quindi definito come limite per $N \rightarrow \infty$ della stima su N campioni

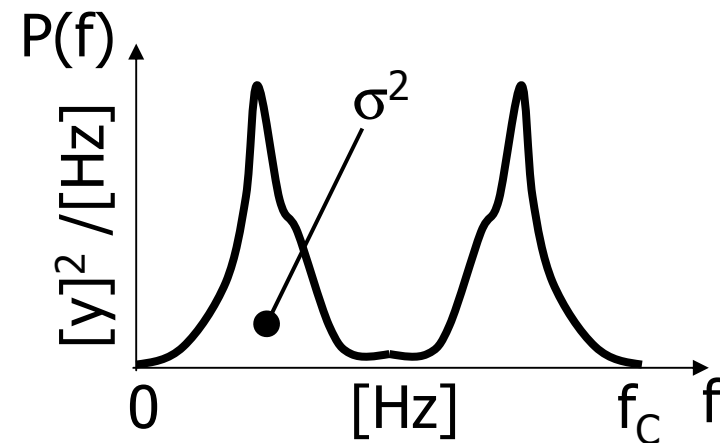
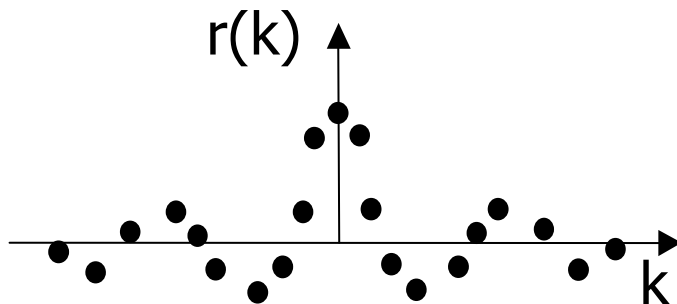
Spettro di potenza - trasf. di Fourier della ACF

- il Th. di **Wiener-Khinchin** definisce lo spettro di potenza di un processo stocastico stazionario come la trasf. di Fourier della ACF; in tempo discreto:

$$S(\Omega) = \mathcal{F}(r(k))$$

- l'antitrasformata di $S(\Omega)$, per $k=0$, coincide con l'integrale dello spettro $S(\Omega)$ e restituisce $r(0)=\sigma^2=\text{Pot.}$ in accordo con Parseval

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\Omega) d\Omega$$



Spettro di potenza

- lo spettro di potenza viene anche detto densità spettrale di potenza (PSD, Power Spectral Density)
- le stime del PSD ottenute mediante trasf. di Fourier (mediante la FFT) sono dette **non-parametriche** e, come vedremo qui di seguito, si basano sul calcolo diretto del periodogramma
- metodi **parametrici** (che vedremo in seguito) non analizzano direttamente il contenuto in freq. ma stimano i parametri di opportuni modelli da cui si ricava la PSD
- alcune applicazioni:
 - ritmi nell'EEG: α , β , θ , δ
 - ritmi nella variabilità della freq. cardiaca: LF (0.1 Hz - controllo cardiovascolare), HF (0.3 Hz - attività respiratoria)
 - freq. media dell'EMG (tipo di unità motorie e freq. di scarica)
 - freq. formanti nel parlato (suoni vocalici e consonantici)
 - suoni valvole cardiache (stenosi od insufficienza valvolare)

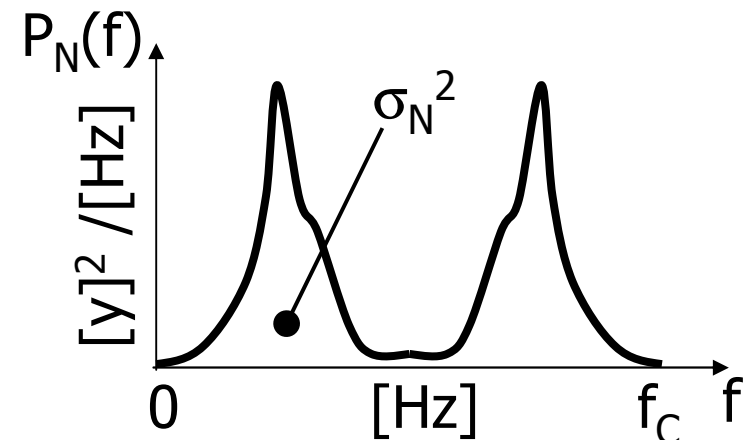
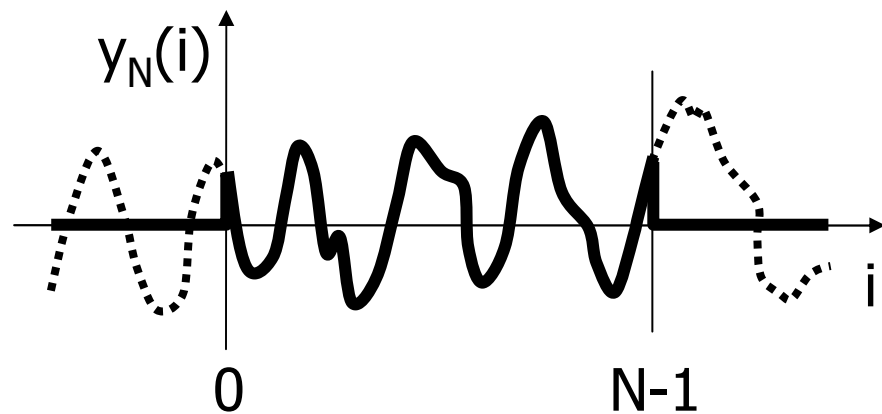
Periodogramma

- sia $y_N(i)$ il segnale **finestrato** su N campioni ($y_N(i)=y(i)$, per $i=0, \dots, N-1$, $y_N(i)=0$ altrove) sia $Y_N(\Omega)$ la sua DTFT, definiamo il **periodogramma** stimato su N campioni, $S_N(\Omega)$

$$S_N(\Omega) = \frac{|Y_N(\Omega)|^2}{N} = \frac{Y_N(\Omega) Y_N^*(\Omega)}{N} ; \quad S(\Omega) = E \left[\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\Omega) \right]$$

- si noti che la relazione di Parseval vale per qualsiasi N:

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(i)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_N(\Omega) d\Omega = \int_0^{f_C} P_N(f) df ; \quad (P_N(f) = T_C S_N)$$

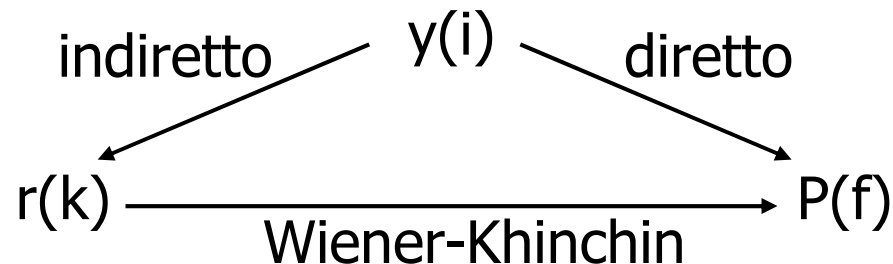


Metodo diretto - metodo indiretto

- si può dimostrare che il **periodogramma** di Schuster, su N campioni, coincide con la **DTFT della stima polarizzata** della ACF

$$S_N(\Omega) = \mathcal{F}(r_N(k)) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-k-1} y(i) y(i+k)\right)$$

- per la stima dello spettro il calcolo del periodogramma dal segnale costituisce un metodo **diretto** in contrapposizione con il metodo **indiretto** (o di Blackman Tukey) che passa attraverso la stima della ACF



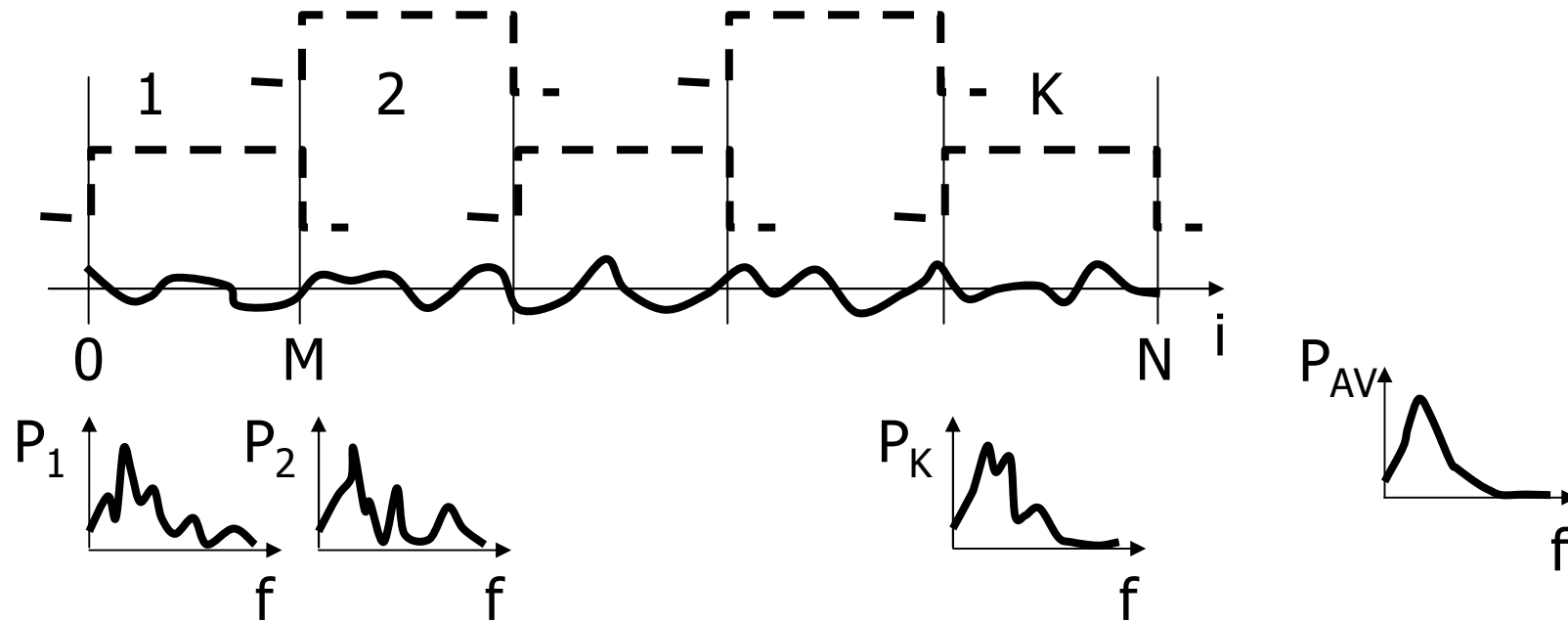
- si noti che la stima della ACF, $r_N(k)$, è polarizzata perchè N-k prodotti sono divisi per N con un effetto di **finestratura triangolare** (di Bartlett) $(N-|k|)/N$ sulla ACF

Stima non parametrica dello spettro di potenza

- il periodogramma permette di applicare l'algoritmo molto efficiente della FFT per ottenere N campioni di $P_N(f)$
- però il periodogramma non è una stima consistente: $E[P_N(f)] \rightarrow P(f)$ per $N \rightarrow \infty$. ma l'errore della stima non $\rightarrow 0$
- in altre parole il periodogramma non sfrutta correttamente l'ergodicità del processo: aumentando N si migliora la risoluzione in freq. ottenendo più campioni fra 0 e la f_c ma l'errore dei punti infittiti non migliora e mantiene una varianza dell'ordine di σ^4
- questo limite viene corretto **diminuendo la risoluzione spettrale** a vantaggio di una **diminuzione dell'errore di stima** ottenendo così degli spettri più **smussati** (smooth)
- vi sono due approcci spesso usati in combinazione:
 - 1) finestrare il segnale raccordando meglio gli estremi a zero
 - 2) dividere gli N campioni in K finestre di M campioni ($N = K M$) e fare la media dei K spettri ottenuti

Metodo di Bartlett

- consiste nel dividere il segnale di N campioni in K finestre di M campioni $N=K M$, calcolare i rispettivi spettri ed infine fare la media dei K spettri
- la risoluzione in freq. (proporzionale a $1/MT_C$) peggiora di un fattore K ; la varianza della stima migliora di un fattore K (SNR spettro migliora di \sqrt{K}) perché, per ergodicità, le stime spettrali delle singole finestre possono essere considerate indipendenti

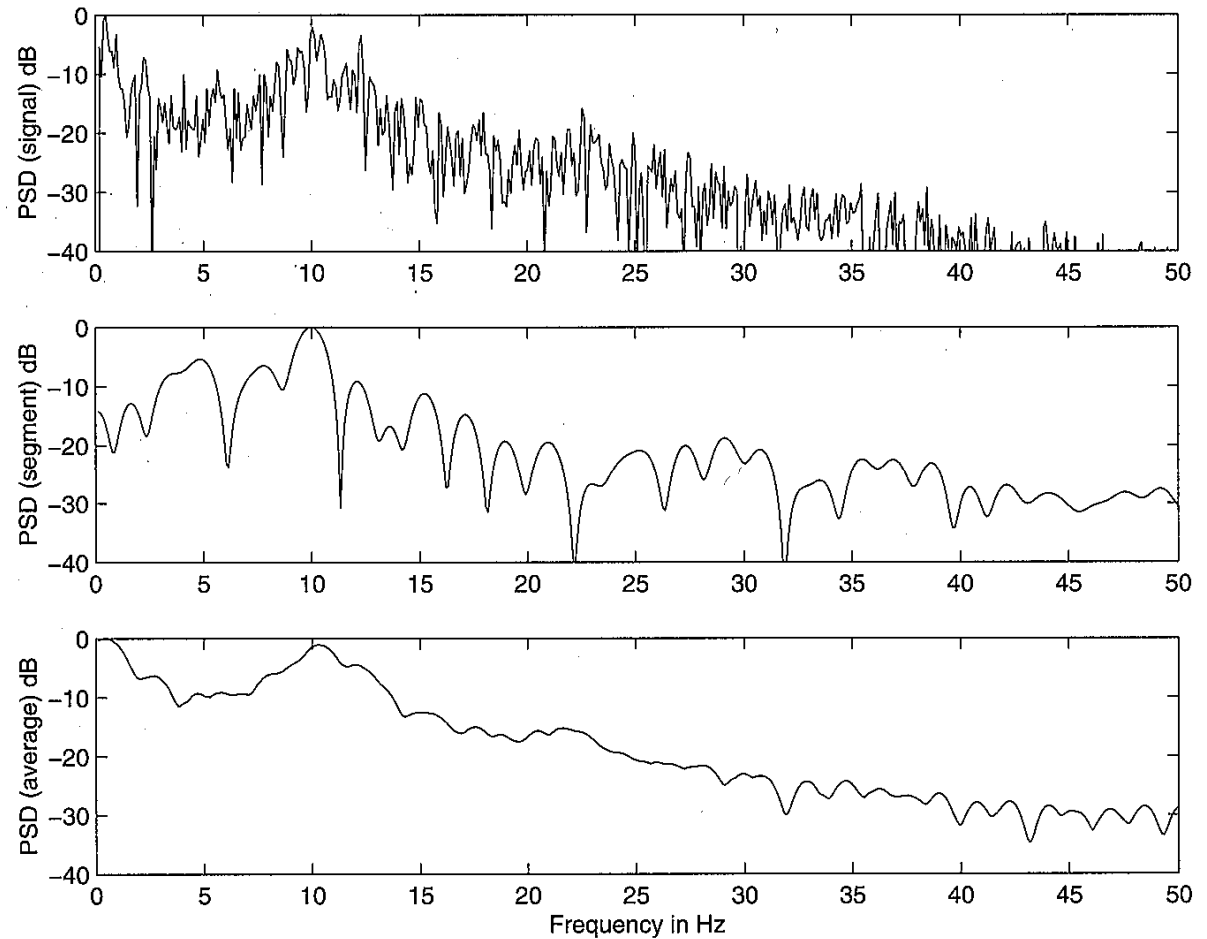


Metodo di Bartlett: finestrazione implicita

- per calcolare in modo più preciso la risoluzione spettrale bisogna tenere conto della **finestrazione implicita del segnale** mediante finestra **rettangolare** con base M campioni, $w_R(i)$
- a questa corrisponde una **finestrazione della ACF** di tipo **triangolare** (Bartlett, vedi stima polarizzata) con una base $2M-1$ (relativa ai campioni di ACF stimati da $r_N(-M)$ ad $r_N(+M)$), $w_B(k)$
- la $w_B(k)$ è pari a $w_R(i) * w_R(-i)$ e la sua trasformata $W_B(f) = |W_R(f)|^2$
- questa relazione di convoluzione nel tempo e di modulo al quadrato nelle frequenze è generale fra la finestra applicata al segnale e quella risultante sulla stima della ACF
- la finestrazione implicita (ed in generale qualsiasi finestrazione) fa sì che il valore atteso della stima sia pari al vero spettro $P(f)$ convoluto per la trasformata della finestrazione della ACF:
 $E(P_N(f)) = W_B(f) * P(f)$
- in questa operazione: il **lobo principale riduce la risoluzione;**
i **lobi laterali causano dei picchi spettrali spuri**

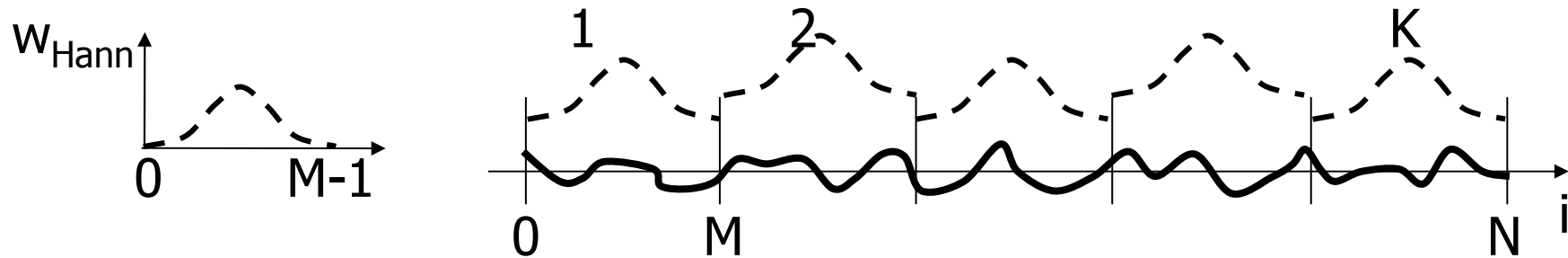
Esempio applicazione del metodo di Bartlett

calcolo del
periodogramma di un
EEG; dall'alto:
1) periodogramma su
 $N=750$ campioni;
2) periodogramma su
 $M=64$ campioni
($K=11$);
3) media di 11
periodogrammi; FFT
su 1024 campioni
(zero padding di
1024-750 campioni
nel primo caso e di
1024-64 campioni
negli altri)

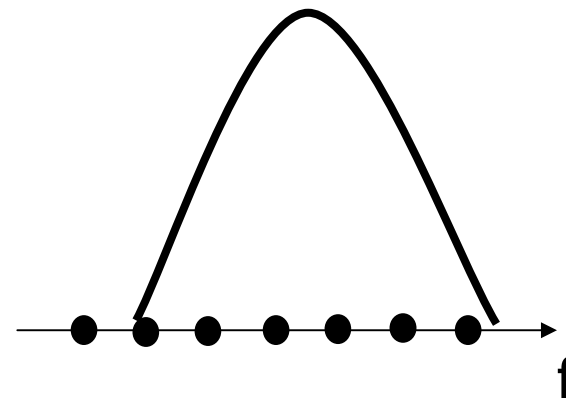
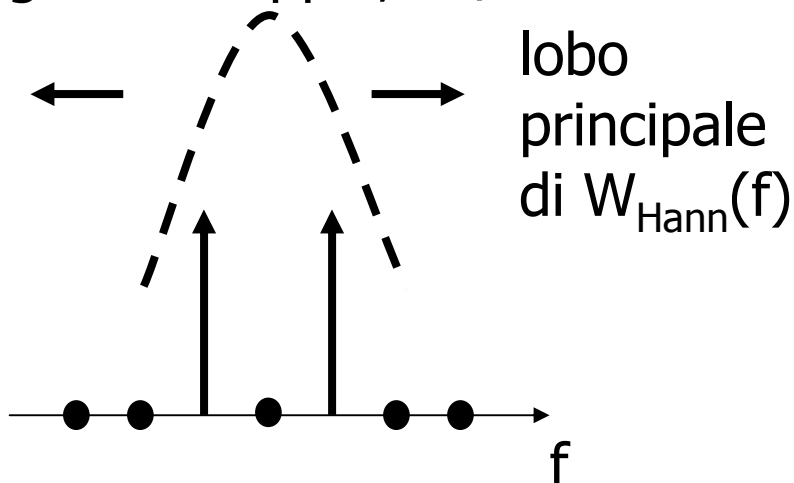


Metodo di Welch: risoluzione in frequenza

- il metodo di Welch modifica il metodo di Bartlett introducendo una finestatura esplicita che raccordi i bordi delle finestre a zero

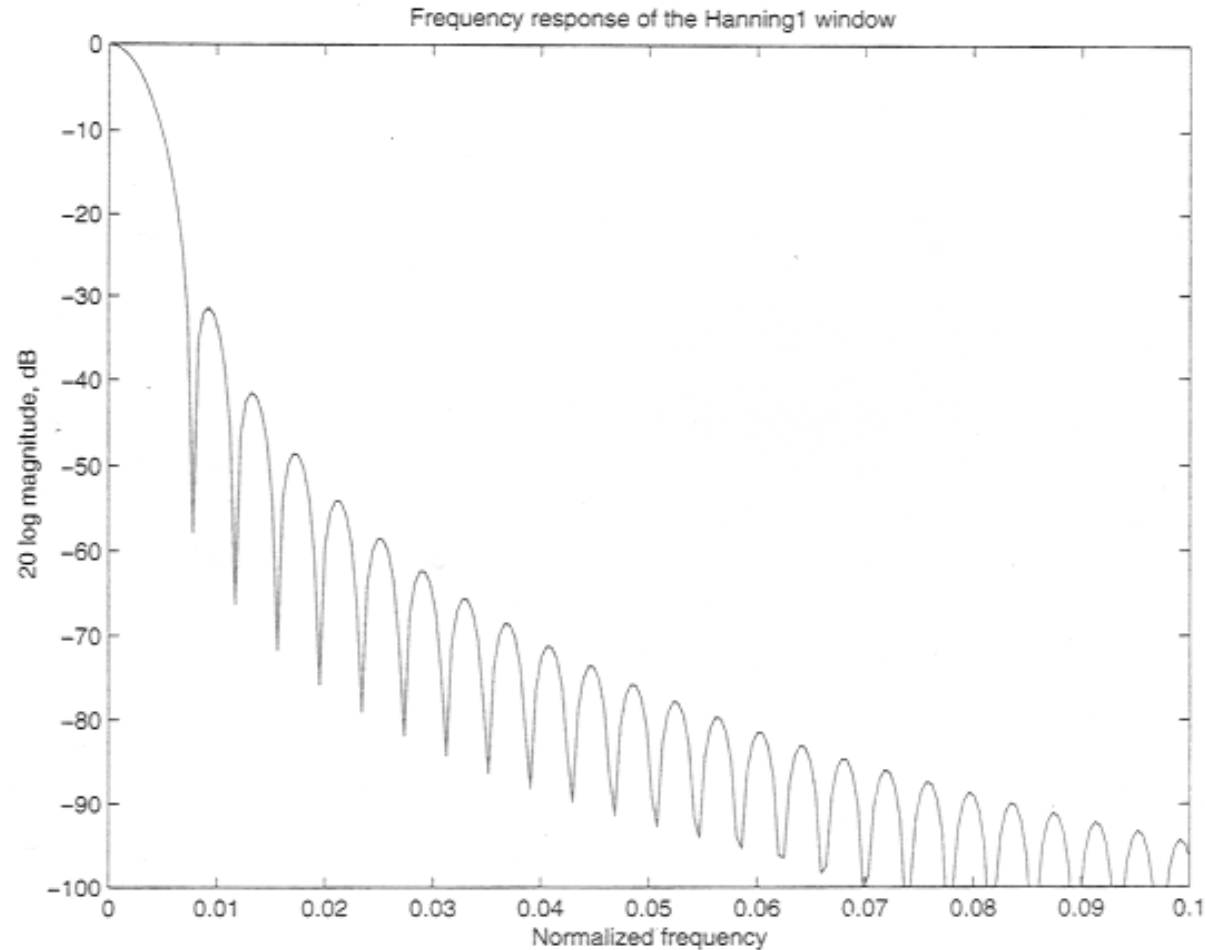


- e.g. una finestra di tipo coseno di Hann (in gergo di "Hanning" per assonanza con Hamming) ha il lobo laterale di -31 db
- vi è però una peggiore risoluzione a causa del lobo principale di larghezza doppia, $8\pi/M$



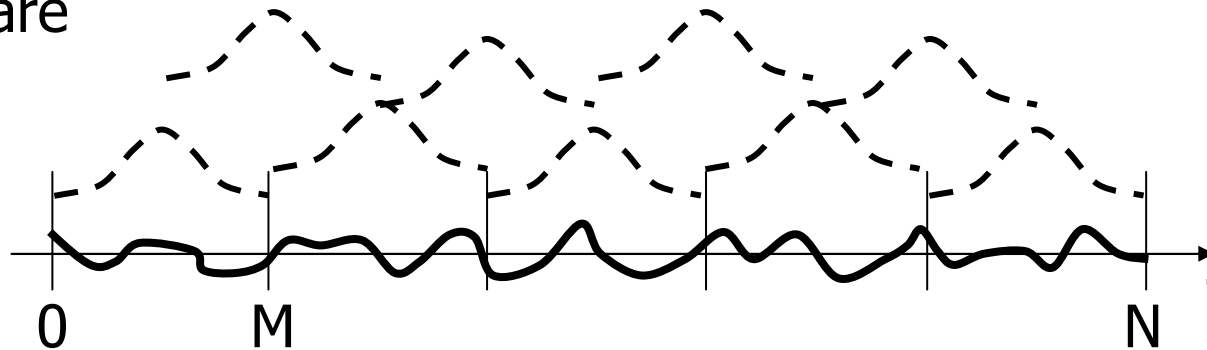
Metodo di Welch con finestra coseno di von Hann

- la finestra $w_{\text{Hann}}(i) = (1/2)(1 - \cos(2\pi i/(M-1)))$ ha lobo principale largo $8\pi/M$ ed il primo lobo laterale a -31 db



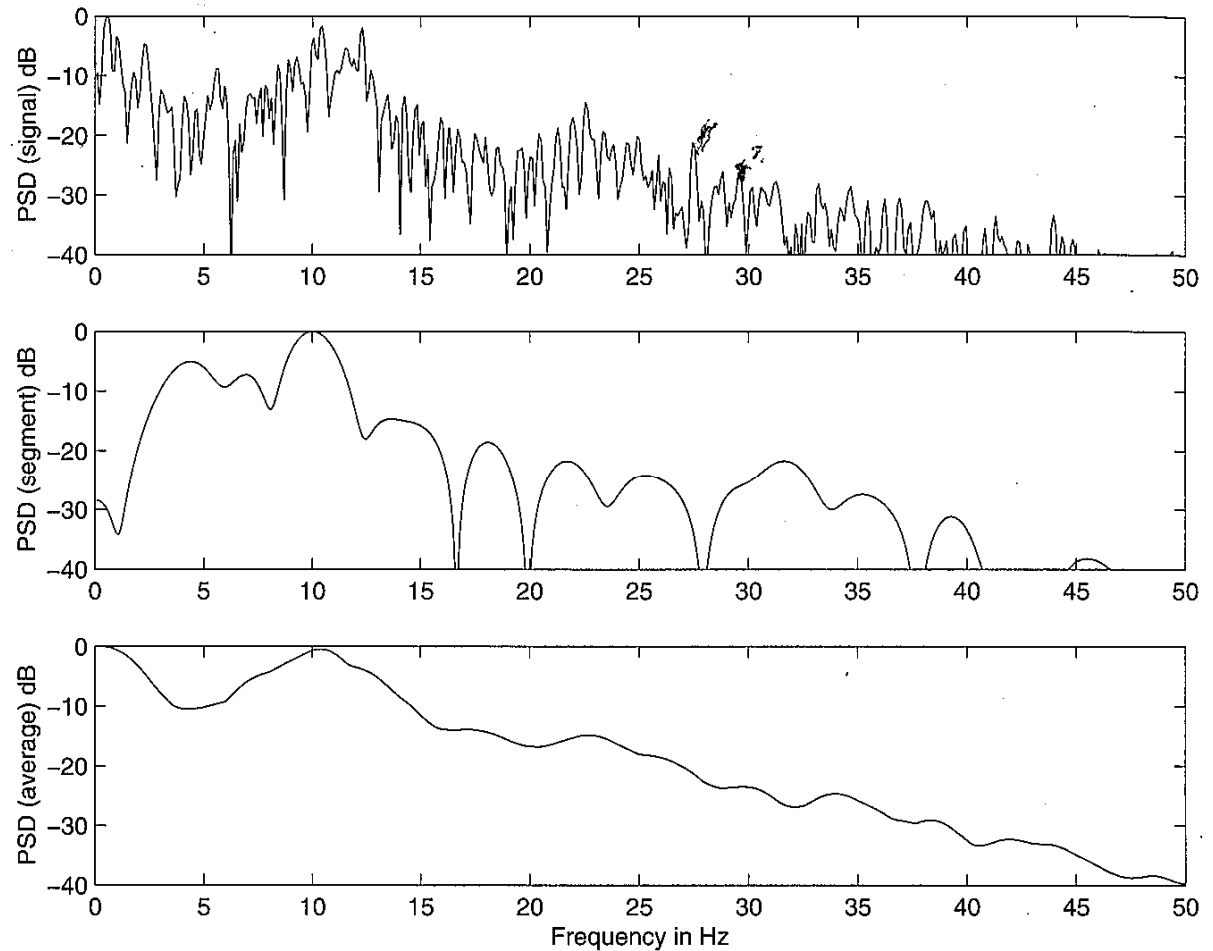
Metodo di Welch: dettagli sull'applicazione

- vi sono anche finestre particolarmente adatte all'analisi spettrale: Chebychev, Gauss, Nuttall, etc.
- per non avere modificazioni dei valori di potenza le finestre vanno scalate in modo da avere media quadratica unitaria
- per poter tracciare lo spettro con una buona risoluzione grafica occorrono in genere più degli M punti di FFT; si può interpolare i campioni in frequenza mediante zero padding nel tempo (questo non aumenta la vera risoluzione in frequenza)
- campioni ai bordi delle finestre raccordate a zero sono pesati poco e quindi si può adottare una sovrapposizione (overlap) fra finestre adiacenti (in genere del 50%) avendo così $2K-1$ spettri da mediare



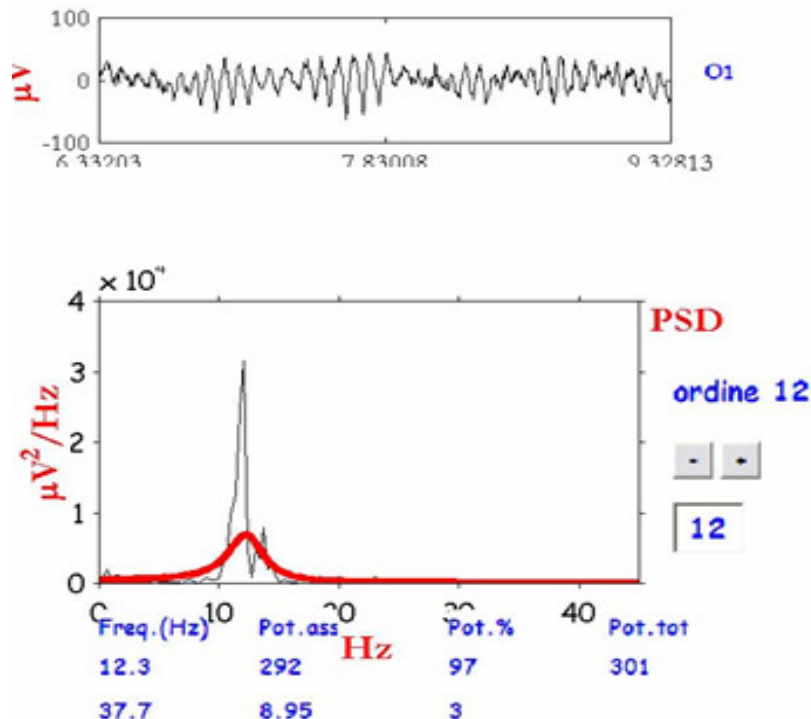
Esempio di applicazione del metodo di Welch

calcolo del
periodogramma di un
EEG; dall'alto:
1) periodogramma su
 $N=750$ campioni;
2) periodogramma su
 $M=64$ campioni
($K=11$) e finestra di
Hann;
3) media di 11
periodogrammi;
(FFT su 1024
campioni)



SPETTRO DI POTENZA

EEG: RITMI
CARATTERISTICI



LIMITI DELLO SPETTRO DI POTENZA

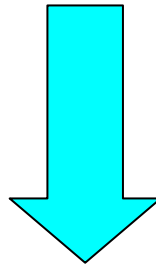
ESISTONO SEGNALI DIVERSI CHE HANNO LO STESSO SPETTRO DI POTENZA

LO SPETTRO DI POTENZA:

- DESCRIVE COMPLETAMENTE I **PROCESSI GAUSSIANI**
- CONTIENE LE STESSHE INFORMAZIONI DELLA **FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE**
- **SOPPRIME** TUTTE LE **RELAZIONI DI FASE** TRA I RITMI PRESENTI IN UN SEGNALE

CARATTERISTICHE DEI SEGNALI BIOLOGICI

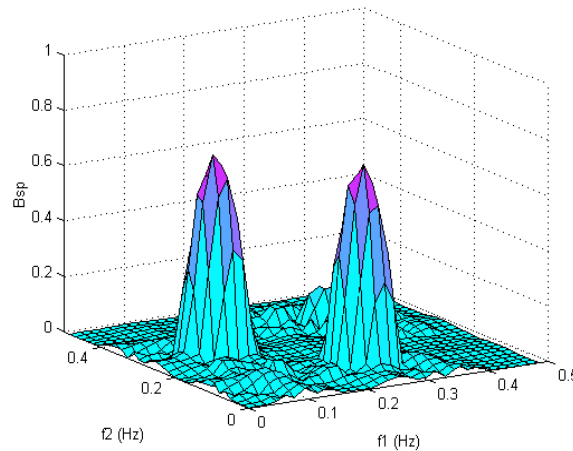
- SONO GENERATI DA MECCANISMI COMPLESSI E NON SEMPRE NOTI
- SONO RAPPRESENTATIVI DELLA INTERAZIONE TRA PIÙ SISTEMI
- SONO CARATTERIZZATI DA DINAMICITÀ E ADATTATIVITÀ
- PRESENTANO VARIABILITÀ INTER E INTRA SOGGETTIVA



È ANCHE NECESSARIO ESTRARRE
INFORMAZIONE DIVERSA E
AGGIUNTIVA RISPETTO ALLO
SPETTRO DI POTENZA

HIGHER-ORDER SPECTRA (HOS)

- NOTI COME POLYSPECTRA
- DEFINITI IN TERMINI DI CUMULANTI DI ORDINE SUPERIORE



- CONTENGONO INFORMAZIONI SULLE **RELAZIONI DI FASE**
- CONTENGONO INFORMAZIONI SULLE **NON LINEARITÀ** DEI SEGNALI
- POSSONO ESSERE UTILIZZATI PER L'ANALISI DI SEGNALI GENERATI DA SISTEMI COMPLESSI, ANCHE FORMATI DA **DIVERSI GENERATORI TRA DI LORO SINCRONIZZATI**

HIGHER ORDER SPECTRA (HOS): applicazioni

- ANALISI DEGLI ACCOPPIAMENTI FRA ARMONICHE DI UN SEGNALE
- IDENTIFICAZIONE DI SISTEMI O RICOSTRUZIONE DI SEGNALI A FASE NON MINIMA;
- CARATTERIZZAZIONE ED ESTRAZIONE DI PROPRIETÀ NON LINEARI DI SEGNALI E IDENTIFICAZIONE DI SISTEMI NON LINEARI;
- ANALISI DELLA DEVIAZIONE DALLA GAUSSIANITÀ;
- SOPPRESSIONE DI RUMORE ADDITIVO GAUSSIANO, NON BIANCO, CON SPETTRO NON CONOSCIUTO.

CLASSIFICAZIONE DEI SEGNALI

SEGNALI

deterministici

stocastici

PERIODICI

NON PERIODICI

STAZIONARI

NON STAZIONARI

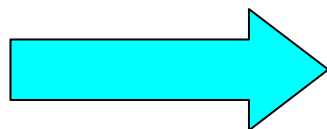
Sinusoidale Complesso

Quasi Periodico Transient
e

Ergodico

Non Ergodico

Segnali speciali



SEGNALI QUALI L'EEG POSSONO ESSERE CONSIDERATI
PROCESSI STOCASTICI STAZIONARI ERGODICI ALMENO IN
UN INTERVALLO DI TEMPO

STATISTICHE DI ORDINE SUPERIORE: momenti di una variabile casuale

- CONSIDERO UNA VARIABILE CASUALE X CON DISTRIBUZIONE f
- IL MOMENTO r -esimo DI X È DEFINITO COME VALORE ATTESO (E) DELLA POTENZA r -esima DI X

$$m_r = E[X^r]$$

- I MOMENTI STATISTICI DESCRIVONO ALCUNE CARATTERISTICHE DELLA f :
 - ✓ $m=1$ MEDIA- valore attorno a cui f si dispone
 - ✓ $m=2$ AUTOCORRELAZIONE - misura della dispersione di f attorno alla media
 - ✓ $m=3$ SKEWNESS- misura della asimmetria di f
 - ✓ $m=4$ KURTOSIS- misura del grado di appiattimento di f attorno al suo centro
- L'INSIEME DI TUTTI I MOMENTI DETERMINA ESATTAMENTE LA f
- SE f È NORMALE, LA CONOSCENZA DEL PRIMO E DEL SECONDO MOMENTO È SUFFICIENTE PER DESCRIVERE COMPLETAMENTE LA DISTRIBUZIONE

RIASSUMENDO...

- GLI SPETTRI DI ORDINE SUPERIORE SONO UTILI NELLA **INDIVIDUAZIONE DELLE NON LINEARITÀ E DELLE RELAZIONI DI FASE** CHE CARATTERIZZANO UN SEGNALE
- GLI SPETTRI DI ORDINE SUPERIORE SONO DEFINITI COME **TRASFORMATA DI FOURIER DELLE STATISTICHE DI ORDINE SUPERIORE**
- LO SPETTRO DEL TERZO ORDINE È CHIAMATO **BISPETTRO**.
- IL BISPETTRO NORMALIZZATO È CHIAMATO **BICOERENZA**.
- LA PRESENZA DI UN PICCO BISPETTRALE E DI BICOERENZA ALLE FREQUENZE (f_1, f_2) INDICA LA PRESENZA DI UNA RELAZIONE TRA LE COMPONENTI SPETTRALI ALLE FREQUENZE f_1, f_2 E $f_1 + f_2$
- IL BISPETTRO E LA BICOERENZA POSSONO ESSERE **STIMATE MEDIANTE METODICHE PARAMETRICHE E NON PARAMETRICHE**